ARTÍCULO DE REFLEXIÓN

Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Characterization of the specialized knowledge of the mathematics teacher

Caracterização do conhecimento especializado do professor de matemática

*Iván Andrés Padilla-Escorcia
**Jenny Patricia Acevedo-Rincón

*Magíster en Educación, https://orcid.org/0000-0003-1210-3712, Profesor e Investigador de la Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

**Doctora en Educación, https://orcid.org/0000-0003-3872-5130, Profesora de la Universidad Industrial de Santander, Colombia.

OPEN ACCESS

DOI: http://dx.doi.org/10.18634/sophiaj.18v.2i.1175

Información del artículo

Recibido: marzo de 2022
Revisado: junio de 2022
Aceptado: septiembre de 2022
Publicado: diciembre de 2022

Palabras clave: conocimiento profesional, conocimiento especializado, profesor de matemáticas, modelo MTSK.

Keywords: professional knowledge, specialized knowledge, mathematics teacher, MTSK model.

Palavras-chave: conhecimento profissional, conhecimento especializado, professor de matemática, modelo MTSK.

Cómo citar: /how cite:
padilla escorcia, ivan, & Acevedo-Rincón , J. P. (2022). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas . Sophia, 18(2). https://doi.org/10.18634/sophiaj.18v.2i.1175

Sophia-Educación, volumen 18 número 2. Julio/diciembre. Versión español

Resumen

En este artículo de reflexión tiene como objetivo caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, desde una mirada del modelo MTSK, cuyo rasgo principal consiste en estudiar el conocimiento matemático y didáctico-pedagógico que requiere un profesor de matemáticas para enseñar esta área del conocimiento en cualquier nivel académico y que nunca antes en los modelos relacionados con el estudio del profesor de matemáticas había sido descrito de una forma explícita, con respecto al conocimiento que requiere un profesor para la enseñanza disciplinar de las matemáticas, que lo hace diferenciar de otro tipo de profesionales, con conocimiento del área. En ese orden, se presenta la estructura del modelo MTSK expresada en dominios, subdominios, categorías de subdominios y ejemplos de las categorías de los subdominios que contribuyen en la exploración del conocimiento con el que debe contar el profesor de matemáticas para enseñar contenidos de las matemáticas. Se concluye que, dada la versatilidad de este modelo, puede ser tomado de referencia para la constitución de nuevas líneas de investigación en el campo de la formación del profesor de matemáticas.

Abstract

In this reflection article, the objective is to characterize the specialized knowledge of the mathematics teacher, from a perspective of the MTSK model, whose main feature consists of studying the mathematical and didactic-pedagogical knowledge that a mathematics teacher requires to teach this area of knowledge in any academic level and that never before in the models related to the study of the mathematics teacher

ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

Conflicto de interés:

Los autores declaran no tener ningún conflicto de interés.

Correspondencia de autor:

*iapadilla@mail.uniatlantico.edu.co
** jepaceri@uis.edu.co

had been described in an explicit way, with respect to the knowledge that a teacher requires for the disciplinary teaching of mathematics, which makes it different from other types of professionals, with knowledge of the area. In that order, the structure of the MTSK model expressed in domains, subdomains, subdomain categories and examples of the subdomain categories that contribute to the exploration of knowledge that the mathematics teacher must have to teach mathematics content is presented. . It is concluded that, given the versatility of this model, it can be taken as a reference for the constitution of new lines of research in the field of mathematics teacher training.

RESUMO

Neste artigo de reflexão, o objetivo é caracterizar o conhecimento especializado do professor de matemática, sob a ótica do modelo MTSK, cuja principal característica consiste em estudar os conhecimentos matemáticos e didático-pedagógicos que um professor de matemática requer para ensinar esta área da conhecimentos em qualquer nível acadêmico e que nunca antes nos modelos relacionados ao estudo do professor de matemática foram descritos de forma explícita, no que diz respeito aos conhecimentos que um professor requer para o ensino disciplinar da matemática, o que o torna diferente de outros tipos de profissionais, com conhecimento da área. Nessa ordem, é apresentada a estrutura do modelo MTSK expressa em domínios, subdomínios, categorias de subdomínio e exemplos das categorias de subdomínio que contribuem para a exploração do conhecimento que o professor de matemática deve ter para ensinar o conteúdo de matemática. Conclui-se que, dada a versatilidade desse modelo, ele pode ser tomado como referência para a constituição de novas linhas de pesquisa no campo da formação de professores de matemática.

Introducción

A lo largo de los años, son múltiples los cambios que han surgido en la educación; distintos modelos, teorías, enfoques y estrategias han sido dispuestas en los procesos de enseñanza-aprendizaje, generando impacto, repercusión y aporte en las prácticas del profesorado. En ese orden, Schön (1983) se considera uno de los precursores en estudiar el conocimiento profesional de un profesor que enseña un saber disciplinar de manera general. De acuerdo con este autor, el conocimiento de un profesor se evidencia a partir de la reflexión que hace desde la experiencia de su práctica pedagógica. En el contexto de la educación matemática, Climent (2005) afirma que el conocimiento profesional de un profesor de matemáticas es situado y contextualizado, es decir, que el profesor desarrolla su conocimiento de acuerdo con el entorno en donde se encuentre y no de manera individual, sino grupal y compartido con la comunidad. No obstante, el conocimiento profesional de un profesor es distinto al de otro, ya que este parte de las creencias y concepciones individuales con las que este convive (Schoenfeld, 2010).

Así, caracterizar el conocimiento especializado de un profesional licenciado es uno de los desafíos más complejos por los que ha pasado la educación. En ese sentido, parece necesario que un profesor no solo debe contar con conocimientos en el área del conocimiento del cual es profesional, sino también contar con conocimientos pedagógico-didácticos que permitan crear armonía en sus prácticas pedagógicas. Por ello Shulman (1986) dividió el conocimiento del profesor en tres categorías: conocimiento del contenido de la materia, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular, que se enuncian a continuación.

El conocimiento del contenido de la materia es aquel que va más allá de los conceptos de una temática, es decir es el conocimiento de las estructuras de la materia misma. Estas estructuras incluyen las sustantivas y sintácticas; las estructuras sustantivas es el conocimiento del profesor para incorporar los principios y conceptos de la disciplina que son aplicados a distintos hechos del diario vivir. Por ejemplo, el conocimiento del profesor para aplicar el concepto de la multiplicación de números naturales que facilita la conversión de dólares a pesos colombianos; por su parte, las estructuras sintácticas es el conocimiento del profesor acerca de la parte formal y demostrativa de los contenidos de la disciplina, determinados por nivel de falsedad, verdad, validez o invalidez de los mismos. Por ejemplo, el conocimiento del profesor para demostrar el por qué en las propiedades de la potenciación, todo número elevado a la cero es igual 1, dado la relación de transitividad

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 \text{ y } \frac{a^m}{a^m} = 1, \text{ por lo tanto, } a^0 = 1$$

Por su parte, el conocimiento pedagógico del contenido es el conocimiento que va ligado al conocimiento del contenido desde la dimensión de la enseñanza. Este tipo de conocimiento se compone de elementos como: las formas de representación, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, estrategias y demostraciones que utiliza el profesor para lograr que los contenidos sean más comprensibles por el estudiantado (Shulman, 1986). Por ejemplo, en el caso de las estrategias de enseñanza, se destaca el conocimiento del profesor para saber que representar las funciones en software especializados de la matemática como GeoGebra, permite que los estudiantes tengan acceso al análisis de las propiedades que tienen las funciones en el plano como: dominio, rango, período, puntos de intersección, entre otras. Esto debido a que una de las principales funcionalidades de estos software radica en analizar de manera profunda y robusta lo que ocurre en el plano cartesiano (Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón, 2021).

El conocimiento del currículo se define como el conocimiento del profesor sobre los programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos concretos de una determinada área del conocimiento en cierto nivel académico (Shulman, 1986). Además, incluye el conocimiento del propio currículo y los diversos materiales que en este se proponen para la enseñanza, así como los tratamientos que pueden existir para orientar una materia, secuenciarla o las formas de evaluación propuestas en el mismo currículo (Montes, 2015).

Así, a pesar que Shulman (1986) no abordó su modelo específicamente desde el contexto de las matemáticas, fue de gran ayuda para que los educadores matemáticos a nivel mundial decidieran estudiar sobre el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. Esto, visto desde la mirada de Montes et al. (2020), enriquece la interpretación del investigador acerca de la naturaleza de los profesores de matemáticas, permitiendo así evaluar las cualidades de ellos y estudiar cómo ese conocimiento profesional se relaciona a través del estudio de las competencias del profesor.

Algunos de los modelos más destacados se presentan en este artículo de revisión, tales como: Bromme (1994), Fennema y Franke (1992) y Ball et al. (2008), esto debido a que son modelos que estudian al profesor de matemáticas y que son citados en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2013; Carrillo et al., 2018), modelo en cuestión a estudiar en este artículo.

El modelo de Bromme

Bromme (1994) fue uno de los primeros en abordar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas mediante cinco dominios que conforman su modelo y que están íntimamente relacionados con lo propuesto por Shulman (1986), estos son: conocimiento del contenido de las matemáticas como disciplina, conocimiento de las matemáticas escolares, filosofía de la matemática escolar, conocimiento pedagógico y conocimiento pedagógico específico de la materia, los cuales se definen a continuación.

El conocimiento del contenido de las matemáticas son los aprendizajes que obtienen los profesores durante sus estudios académicos, como, por ejemplo, proposiciones, reglas, formas matemáticas de pensar y métodos, que son visibles en manuales de formación de matemáticos.

El conocimiento de las matemáticas escolares es la capacidad que tiene el profesor de comprender que los contenidos a enseñar no son simplemente las bases puras de la materia, sino que estos más bien son adaptados a la realidad que se vive en las escuelas.

La filosofía de la matemática escolar es el conocimiento del profesor acerca de los fundamentos epistemológicos de la matemática, así como del aprendizaje de las matemáticas, o las relaciones entre las matemáticas, la vida humana y otras disciplinas.

En cuanto a lo pedagógico, Bromme (1994) estableció dos dominios, uno general y otro específico. El general, es el conocimiento de orientaciones sobre cómo mantener un ambiente de trabajo por grupo. Por ejemplo, las estrategias que utiliza un profesor para mantener la disciplina y el orden en clase (como el juego de la distensión y el juego de los aplausos). Por otro lado, el conocimiento pedagógico específico, es aquel que está integrado o mezclado entre el conocimiento pedagógico y la experiencia profesional del profesor con las matemáticas, esto

ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

debido a que no es lo mismo un profesor de matemáticas cuya experiencia profesional es nula (recién grado de licenciado) con la de un profesor de matemáticas con años de experiencia, ya que se espera que haya pasado por experiencias que hayan fortalecido su práctica como profesor, que a su vez permite una relación más profunda con sus conocimientos pedagógicos.

El modelo de Fennema y Franke

Fennema y Franke (1992) se enfocaron en que la enseñanza de los contenidos de las matemáticas debía darse de forma dinámica e interactiva. Por ello consideraron, que es necesario que en el modelo del *"conocimiento del profesor"* los profesores cuenten con conocimientos suficientes acerca de las matemáticas como disciplina para poder enseñarlas. Para ello, establecieron cuatro dominios en dicho modelo: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico, conocimiento de la cognición de los estudiantes y las creencias de los profesores. Estos cuatro dominios se definen a continuación:

(i) El conocimiento del contenido es aquel en el cual se comprenden los conceptos, procedimientos y procesos en la resolución de problemas de situaciones del entorno que relaciona las matemáticas, así como las interrelaciones que se dan entre los conceptos y procedimientos en este tipo de situaciones; (ii) el conocimiento didáctico consiste en el tipo de procedimientos, organización y técnicas motivacionales que utilizan los profesores como estrategias en la planificación de las unidades de clase; (iii) el conocimiento de la cognición de los estudiantes es el conocimiento de los profesores para comprender los procesos de aprendizaje de los estudiantes, esto es, lo que se le facilita y dificulta de los diferentes contenidos de las matemáticas; (iv) las creencias de los profesores son las percepciones que influyen en la comprensión de estos en la enseñanza de las matemáticas, dependiendo del contexto en el que se encuentre y de las experiencias con las que cuente.

El modelo de Ball y sus colaboradores

En esa misma década Deborah Ball y sus colaboradores, en el grupo de investigación de matemática educativa de la Universidad de Michigan en el año 2008, afinaron el modelo propuesto por Shulman en los 80. Su preocupación estaba puesta en estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas, con la idea de darle más finura a esa profesión, de manera que se pudieran establecer diferencias marcadas entre los profesores de matemáticas con los demás profesionales que también tienen conocimientos del área. Para esto, los dominios que proponía Shulman (el conocimiento de los contenidos y el conocimiento didáctico de los contenidos) fueron la base en este modelo denominado *"Conocimiento Matemático para la Enseñanza"* (Ball et al., 2008), cada uno con tres respectivos subdominios.

En lo referente al conocimiento del contenido, Ball et al. (2008) propusieron los siguientes tres subdominios: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte del contenido, los cuales se definen a continuación: (i) El conocimiento común del contenido es el conocimiento utilizado en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza, es decir que cualquier persona formada en matemática podría poseer. Por ejemplo, la noción de saber cuándo una fracción con igual denominador es mayor o menor que otra a través de análisis de cantidad y repartición; (ii) El conocimiento especializado, que es el conocimiento de las habilidades netamente matemáticas que requiere un profesor para la enseñanza y que se considera el aporte más significativo que se resalta en este modelo, puesto que condujo a pensar en la necesidad de que la enseñanza de las matemáticas estuviera a cargo de profesionales con formación en Educación Matemática y que algunas de las tareas más recurrentes que debería cumplir un profesor con conocimiento especializado en las matemáticas fueran: presentar ideas matemáticas, encontrar ejemplos para abordar un tema matemático específico, relacionar un tópico con otro de años anteriores o posteriores, modificar tareas para hacerlas más complejas o sencillas, evaluar los argumentos de los estudiantes, usar el lenguaje formal de las matemáticas en las definiciones, entre otras (Montes, 2015); (iii) El conocimiento del horizonte matemático es el nivel de conciencia de los profesores acerca de cómo están distribuidos los contenidos de matemáticas en el currículo, de manera que esté en la capacidad de establecer relaciones entre los contenidos dependiendo de los distintos niveles de escolaridad; estas pueden ser, además, dentro del mismo concepto (intra conceptuales) o entre diferentes conceptos (inter conceptuales). Por ejemplo, un profesor de primaria debe saber los conocimientos e interpretaciones que requieren sus estudiantes acerca de los números fraccionarios para luego afrontar los números racionales en los grados de secundaria (conexión interconceptual).

En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, Ball et al. (2008) propusieron los siguientes tres subdominios: conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento de la enseñanza del contenido y conocimiento curricular, los cuales se enuncian a continuación: (i) El conocimiento del contenido y los estudiantes es el conocimiento que mezcla conocer a los estudiantes y a los contenidos de matemáticas a partir de las dificultades, obstáculos y necesidades más frecuente que enfrentan los educandos en el aprendizaje de los tópicos. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor para identificar que las principales causas que llevan a malos rendimientos de los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra se derivan de dificultades de operar números naturales, enteros y racionales; (ii) El conocimiento de la enseñanza del contenido es definido como la mezcla de conocer la enseñanza y los contenidos de matemáticas, esto para diseñar estrategias, unidades didácticas y actividades que permitan facilitar el aprendizaje de los educandos con base en los errores con los que estos cuentan. Por ejemplo, en la enseñanza de fracciones utilizar elementos de la vida real como galletas, manzanas, chocolate, entre otros y repartirlos en partes iguales son situaciones que permiten comprender la esencia del concepto de fracción; (iii) El conocimiento curricular es el conocimiento acerca de los objetivos y fines curriculares que guían la práctica pedagógica del profesor de matemáticas, siendo muy similar a lo anterior a lo propuesto en los 80 por Shulman (1986).

No obstante, cabe destacar que una de las principales dificultades que se encontraron en este modelo estuvo en determinar lo que es considerado como conocimiento común y conocimiento especializado en matemáticas, ya que de acuerdo al nivel de escolaridad en el que se encuentre enseñando matemáticas un profesor, se podría afirmar si tiene o no conocimiento especializado de un contenido en específico (Flores, Sosa y Ribeiro, 2016). Por ejemplo, una persona del común por intuición podría saber que el número decimal 2.405 es menor que el número decimal 2.41, sin embargo, un profesor con conocimiento especializado del tema sabe, que 2.405 es menor a 2.41, porque en la comparación de las centésimas del número decimal 0 es un número menor a 1.

El modelo propuesto por Ball et al., (2008) a pesar que ofreció mayor claridad y explicites en cuanto a detallar el conocimiento que requiere el profesor para la enseñanza de las matemáticas, abordando aspectos como el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de sus estudiantes, en cuanto al dominio didáctico-pedagógico. Se considera que dejó abierta a la interpretación del lector y de la literatura el subdominio de conocimiento especializado del profesor, el cual propusieron como una manera de diferenciarlo del conocimiento común de un profesional con conocimiento matemático, claro está que Ball y colaboradores pensaron en este subdominio como algo más de tipo matemático, por lo que habría sido interesante mirarlo desde el saber didáctico-pedagógico, que se espera logren los licenciados en matemáticos, y no profesionales como matemáticos, físicos, ingenieros, entre otros, en cuya formación no se contempla lo antes en mención. De igual manera, en este subdominio más allá de que haya sido pensado netamente en el plano disciplinar, tampoco evidenció de manera explícita, en qué conocimientos de las matemáticas se diferencia alguien con conocimiento especializado de alguien con conocimiento común.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El modelo denominado *Mathematics Teacher Specialized Knowledge* (MTSK), en Español "Conocimiento especializado del profesor de matemáticas" es generado en el seno del grupo "Seminario de Investigación en Educación Matemática" (SIDM) y coordinado desde la Universidad de Huelva en España. De acuerdo con Carrillo et al. (2018). Este modelo, surge desde una necesidad de complementar trabajos realizados por Fennema y Franke (1992), Bromme (1994), Ball et al., (2008), entre otros, con respecto a la profesionalización del profesor de matemática, así como una oportunidad de ser tendencia dentro de nuevas líneas de investigación que estuvieran encaminadas al análisis del profesor de matemáticas, como oportunidad de mejora para su práctica pedagógica. Es por eso, que este modelo se centra en el conocimiento profesional que necesita y usa el profesor para explicar y comprender la naturaleza de las matemáticas. Por tal motivo no abarca los conocimientos generales pedagógicos de los profesores (Pedagogía y Psicología) al no ser estos específicos de las matemáticas.

Este modelo consta de dos dominios. Por una parte, el **conocimiento de las matemáticas** (MK), el cual representa una red de conocimientos estructurada de acuerdo con reglas y conexiones que permiten comprender la naturaleza de las matemáticas, la razón y el origen de los procedimientos, el lenguaje matemático y su precisión; además, abarca el conocimiento matemático que el profesor usa, o puede usar, en cualquier actividad y que trasciende aún más del contenido matemático que se pretende que aprenda un estudiante del nivel académico en el que enseña, no solamente en cantidad de conocimiento sino también en la naturaleza de este, es decir en las diversas aplicaciones que tienen los contenidos de las matemáticas (Carrillo et al., 2018; Advíncula et al., 2021). De este se desprenden los siguientes tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de las estructuras matemáticas (KSM) y conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM).

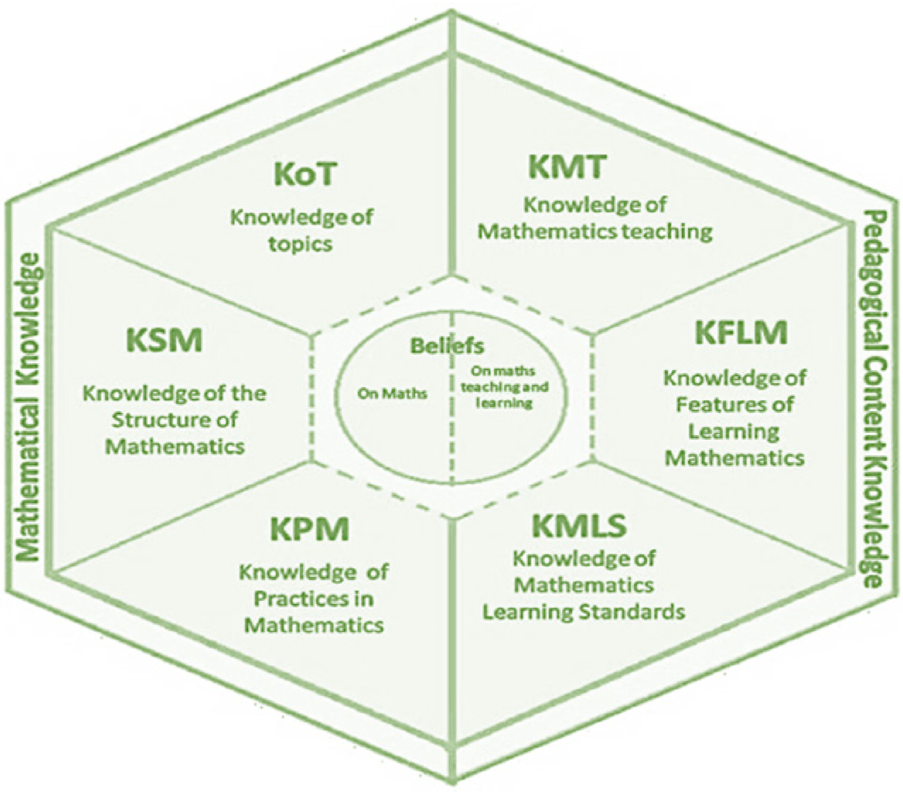
1. Por otro lado, el dominio **conocimiento pedagógico del contenido** (PCK) que se basa en las formas de profundizar el contenido matemático cuando se tiene la intención de enseñanza y aprendizaje (Rojas, Flores-Medrano y Carrillo, 2015; Vasco y Climent, 2018). A su vez, se desprenden los siguientes tres subdominios: conocimiento de

ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

las características de aprendizaje en matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje matemáticos (KMLS).

A su vez, cada uno de los seis subdominios antes mencionados, giran alrededor de las creencias y concepciones con las que cuentan los profesores con base en las experiencias que tienen en la enseñanza de las matemáticas, y que son identificadas como la filosofía de las matemáticas, como componente dentro del conjunto de conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2017). Así, en la Figura 1 se muestra la forma en cómo están distribuidos los dominios y subdominios de conocimiento del modelo. En la parte de la izquierda del modelo se ubica el conocimiento matemático (MK) y sus 3 subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de las estructuras matemáticas (KSM) y conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM); por su parte, en la derecha del modelo, se ubica el dominio de conocimiento didáctico-pedagógico (PCK) y sus 3 subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS); en el centro del modelo se ubican las creencias y percepciones del profesor de y como estas subyacen en cada subdominio de conocimiento, como se observa en la Figura 1:

Figura 1. Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas



Fuente: Carrillo et al. (2018).

Ahora bien, el KoT, en Español **conocimiento de los temas**, no se refiere solamente al conocimiento de la matemática como disciplina, sino que incluye a la matemática escolar. Es decir, describe qué y cómo conoce el profesor de matemáticas los temas que va a enseñar, el conocimiento fundamentado de los contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos, hechos, reglas, teoremas, lemas, etc.) y sus significados, además de las conexiones que se establecen entre los diferentes contenidos y las maneras de utilizar los registros de representación (Escudero y Carrillo, 2020). En el KoT se visionan cinco categorías de acuerdo con lo aportado por Flores-Medrano et al. (2014) en su tesis de doctorado y que son indispensables para todo profesor que enseña matemática.

1. *La fenomenología de los contenidos* corresponde al conocimiento del profesor sobre el uso y aplicaciones de un tema en específico dentro de las propias matemáticas (intra conceptuales), así como sobre situaciones de la vida real dentro de las cuales el profesor puede ubicar un tema (Vasco, Climent, Escudero, Montes & Ribeiro, 2016). Por ejemplo, el conocimiento del profesor para identificar que la representación de la transmisión de una enfermedad o el drenado de un tanque pueden estudiarse utilizando una ecuación diferencial.
2. La categoría *propiedades y fundamentos atribuibles a un tema en particular* corresponde al conocimiento del profesor acerca del uso de propiedades y reglas de los contenidos particulares en las matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento del profesor acerca de las propiedades de la potenciación que debe tener en

cuenta para solucionar una expresión algebraica con potencias. Esto se observa en la siguiente operación combinada con potencias $\frac{x^3x^2x^6}{x^7}$; en esta, utilizar las propiedades de las potencias de manera independiente contribuye a solucionar el ejercicio de manera más rápida y sencilla, inicialmente aplicando la propiedad producto de potencias de bases iguales el resultado sería $\frac{x^{11}}{x^7}$, luego la propiedad cociente de potencias de bases iguales que da como resultado X_4 . Así mismo, la diferencia entre propiedades dependiendo de la estructura matemática en la cual se esté abordando un contenido; por ejemplo, las matrices no cumplen con algunas propiedades de estructura algebraica, como la propiedad conmutativa, que sí cumplen las operaciones básicas de adición y multiplicación en los números reales.

3. *Los registros de representación* son los conocimientos del profesor acerca de las distintas formas en que puede representarse un contenido, bien sea gráficamente, verbalmente, numéricamente, analíticamente, etc. Por ejemplo, los conjuntos que pueden representarse por comprensión o por extensión. Así: A= {el conjunto de los números impares menores a 21} o A= {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,19}; así mismo ocurre en las fracciones, las cuales pueden ser representadas de manera gráfica, concreta, verbal o simbólica.

4. *Las definiciones* son el conocimiento del profesor para, de acuerdo con las propiedades que se cumplen en las matemáticas, definir un tema en específico. Por ejemplo, la definición de un número impar teniendo en cuenta que este debe ser de la forma 2+1 o 2+3, la definición de un triángulo rectángulo, a partir de que a lo sumo debe tener un ángulo recto (90°).

5. La categoría de *procedimientos* es el conocimiento del profesor sobre los algoritmos convencionales y alternativos que se utilizan en los contenidos de la matemática; es el conocimiento que tiene el profesor para responder preguntas que formulan los estudiantes como: ¿Cómo se hace? ¿Por qué se hace así? ¿Por qué se utiliza así? o ¿Qué quiere decir eso? Un ejemplo de esto es, el conocimiento del profesor para saber por qué el rango de la función trigonométrica establecida por la fórmula es $f(x) = -\frac{1}{2} sen\, x$ **es** $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ **y el rango de la función** $g(x) = 4\, sen\, x$ **es** $(-4, 4)$ entre otros ejemplos propuestos por Aguilar-González, Muñoz-Catalán y Carrillo (2019) sobre el conocimiento del profesor de las propiedades y elementos (ángulos, lados y vértices) que se utilizan para definir a los polígonos en Geometría.

El KSM, **conocimiento de las estructuras matemáticas,** en Español, corresponde al constructo personal que el profesor desarrolla sobre la forma en que están conectados internamente las temáticas de matemáticas para relacionarlas entre sí, bien sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles superiores (Montes, 2015; Vasco y Climent, 2018), de manera que en dichas relaciones permiten incrementar o simplificar el grado de complejidad de una temática en específico (conexiones inter conceptuales e intra conceptuales), es decir dentro del mismo campo de las matemáticas. (Flores-Medrano et al., 2016). Ahora bien, las conexiones inter conceptuales son ideas matemáticas que vinculan representaciones del mismo concepto o diferentes; las conexiones intra conceptuales son ideas matemáticas que tienen lugar en la proximidad de un único concepto (Martínez et al., 2011). Así mismo, Flores-Medrano et al. (2014) propone cuatro categorías acerca del conocimiento del profesor de matemáticas para establecer conexiones en los contenidos que enseña; estas son: las conexiones de complejización, simplificación, transversales y auxiliares.

1. *Las conexiones de complejización,* son los conocimientos del profesor para relacionar los contenidos enseñados con contenidos posteriores, es decir una visión de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado de lo particular a lo general. Por ejemplo: el conocimiento del profesor para relacionar que la enseñanza de la factorización será fundamental en el aprendizaje del límite de funciones; así mismo, el conocimiento del profesor para relacionar las nociones geométricas que desarrollan los estudiantes (recta, punto, ángulo, polígonos) en primaria, con la demostración de teoremas de geometría euclidiana en secundaria.

2. *Las conexiones de simplificación* son los conocimientos del profesor para relacionar los contenidos que enseña con contenidos anteriores, es decir previamente abordados por sus estudiantes. Por ejemplo, en la realización de la derivada de la función expresada por la fórmula $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$, se denota el conocimiento del profesor para factorizar, tanto el numerador como el denominador; en el caso del numerador:

ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

$(x^2 - 1)$, como $(x-1)(x+1)$, y en el denominador (x^2+2x+1), como $(x+1)(x+1)$, lo que se considera como conexión interconceptual. En este caso la función se reduce a $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, la cual es mucho más sencillo de derivar que como estaba propuesta originalmente.

3. *Las conexiones de contenidos transversales* son los conocimientos del profesor para relacionar contenidos comunes de diferentes tipos de pensamientos matemáticos, como, por ejemplo, el límite, la derivada, y la continuidad puntual y global que subyacen a procesos infinitos, o también la relación que menciona Climent et al. (2021) de que la igualdad está presente en expresiones numéricas y algebraicas (pensamiento numérico) y que se relaciona a su vez con la congruencia de figuras geométricas y la semejanza (pensamiento geométrico).

4. Por último, *las conexiones auxiliares* son los conocimientos del profesor para realizar conexiones de tipo inter conceptual que no hacen parte del contenido que se está enseñando y que contribuye en la solución del problema que se esté desarrollando. Por ejemplo, en el límite $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, al ser esta una operación cuyo resultado es igual a una indeterminación de la forma: $\frac{0}{0}$ si se reemplaza el valor de x, se hace uso de la regla de L'Hopital como conexión auxiliar, ya que, mediante el concepto de derivada se deriva tanto el numerador y denominador de la función, hasta que se desaparezca la indeterminación en esta.

Por su parte, el KPM, **conocimiento de las prácticas matemáticas en español**, es el conocimiento específico del profesor para demostrar, justificar, validar, hacer deducciones e inducciones y generar conocimiento en matemáticas, es decir su significado puro. Así mismo, es el conocimiento del profesor sobre la organización jerárquica, las formas de proceder en la resolución de problemas matemáticos, el buen uso de símbolos formales en matemáticas y las condiciones necesarias y suficientes que se requieren para generar una definición en matemáticas. Además, el conocimiento del profesor acerca de prácticas particulares de las matemáticas como la modelación (Montes, 2015; Aguilar-González, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2019; Flores-Medrano et al., 2016; Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón, 2020 y Zakaryan y Sosa, 2021).

Ahora bien, Flores-Medrano et al. (2014) proponen categorías que están ligadas al conocimiento de las prácticas de los profesores de matemáticas. Estas son: prácticas ligadas a las matemáticas en general y prácticas ligadas a una temática en matemáticas, que se definen a continuación:

1. *prácticas ligadas a la matemática en general* son el conocimiento del profesor para saber cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto trabajado y de las estructuras lógicas de pensamiento que contribuyen a comprender el funcionamiento de múltiples aspectos matemáticos; por ejemplo, el conocimiento del profesor acerca de que los puntos de acumulación, puntos de adherencia, o puntos interiores son conceptos que a partir de su abstracción se derivan de conceptos de la topología general.

2. *prácticas ligadas a una temática en matemáticas* son el conocimiento del profesor acerca de los contenidos a impartir desde su estructura matemática; por ejemplo, saber el significado de una condición necesaria y una condición suficiente para trabajar genéricamente en matemáticas, lo cual permite la creación de estructuras lógicas de pensamiento que pueden mejorar el entendimiento de fenómenos cotidianos (Montes, 2015).

El KFML, **conocimiento de las características de aprendizaje,** en Español, está enfocado en reconocer a los contenidos de las matemáticas como objetos de aprendizaje (Escudero y Carrillo, 2020; Aguilar-González et al., 2018), esto es, el conocimiento del profesor para comprender las relaciones que establecen los estudiantes con los conceptos trabajados, así mismo, las capacidades y debilidades que tienen acerca de estos. Es decir, que el profesor sepa cómo aprende el estudiante y cómo desarrollan la cognición los estudiantes de acuerdo con las temáticas abordadas. De igual manera, el conocimiento de los obstáculos, dificultades y errores que más presentan los estudiantes al aprender los contenidos de las matemáticas.

Ahora bien, Escudero-Ávila y Carrillo (2020) proponen que este subdominio del MTSK, se desprende en las siguientes categorías: fortalezas y dificultades asociados al aprendizaje de un contenido matemático, formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático, intereses y expectativas de los estudiantes y teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático.

1. *el conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de los contenidos matemáticos* es el conocimiento del profesor acerca de las concepciones erróneas que existen sobre un determinado tema por parte de un estudiante y que son propias del contenido matemático específico, es decir, que están

asociadas directamente con las características matemáticas y no pedagógicas del contenido. Sumado a esto, en esta categoría también se encuentra el conocimiento de las ideas matemáticas incorrectas que los estudiantes pueden adquirir de un contenido de las matemáticas. Un ejemplo de esto son las dificultades que presentan los estudiantes para interpretar gráficamente el concepto de rango de la función trigonométrica seno, debido a que no comprenden el concepto de rango de una función en general.

2. *El conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático* se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales en el aprendizaje de las matemáticas; incluye también el conocimiento del profesor sobre los posibles modos de los estudiantes de construcción de conocimiento asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Un ejemplo de esto es el conocimiento del profesor acerca de que la estrategia que utilizan los estudiantes para sumar o restar números racionales heterogéneas es el método de la "carita feliz" o cruzado por encima del método del mínimo común múltiplo, incluso cuando se trata de más de tres números racionales los que se operan.

3. En cuanto al *conocimiento de los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el contenido matemático,* son los conocimientos del profesor acerca de las expectativas e intereses de los estudiantes con respecto al aprendizaje de las matemáticas, además del conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas comúnmente a las distintas áreas de las matemáticas con las que cuentan los estudiantes

4. *Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático* es el conocimiento que tiene el profesor de las posibles formas de aprehensión asociadas a la naturaleza del contenido matemático. Incluye el conocimiento de teorías sobre el desarrollo cognitivo del estudiante, tanto para la matemática en general como para contenidos particulares, las cuales provienen de la experiencia profesional del profesor o de la investigación sustentada en teorías que permitan explicar los procesos de construcción de conocimiento matemático desde la mirada de la enseñanza y aprendizaje (Escudero-Ávila, 2015).

Por otro lado, en cuanto al KMT, **conocimiento de la enseñanza de las matemáticas,** en Español, es el conocimiento del profesor acerca de teorías formales de la enseñanza de las matemáticas, derivadas de investigaciones en Educación Matemática o de observaciones y reflexiones de las actividades de matemáticas en el salón de clases. Este se enfoca en las habilidades y el grado de conciencia que posee el profesor en la selección y uso de estrategias a nivel conceptual o pedagógico para la enseñanza de las matemáticas (Delgado y Zakaryan, 2019; Montes, 2015). En ese orden, Flores *et al.* (2014) propuso tres categorías que caracterizan el conocimiento del profesor desde la mirada de la enseñanza de las matemáticas, estas son: teorías personales e institucionalizadas de enseñanza, conocimiento acerca de recursos materiales y virtuales y el conocimiento de las estrategias, técnicas, ejemplos y tareas para la enseñanza del contenido matemático, las cuales se definen a continuación:

1. *Teorías personales e institucionalizadas de enseñanza* son los conocimientos del profesor sobre las teorías de enseñanza en Educación Matemática, como, por ejemplo, la teoría de las situaciones didácticas que propone Brousseau y las situaciones que pueden darse en la misma [acción, formulación, validación e institucionalización] y que sirven para planificar actividades o estrategias en clase. Además, el conocimiento para identificar el nivel de potencialidad que ofrecen este tipo de actividades, talleres y unidades didácticas propuestas, o el conocimiento de ejercicios, metáforas, explicaciones y analogías que conoce el profesor e influyen en el aprendizaje e interpretación de los estudiantes en los contenidos. Por ejemplo, la enseñanza de los números primos utilizando la criba de Eratóstenes en material concreto (cartulina).

2. *El conocimiento acerca de recursos materiales y virtuales* es el conocimiento para enseñar matemáticas mediante libros de textos, regletas, pizarra normal y electrónica, tangram, softwares especializados del área, entre otros.

3. *El conocimiento de las estrategias, técnicas, ejemplos y tareas para la enseñanza del contenido matemático* es el conocimiento que tiene el profesor acerca del potencial que ofrecen las actividades, tareas, ejemplos, estrategias (incluye el uso de analogías para la enseñanza) o técnicas didácticas en la enseñanza de los contenidos de las matemáticas (Espinosa-Vásquez, Zakaryan y Carrillo, 2018). Un ejemplo de esto sería cuando un profesor enseña las tablas de distribución de frecuencia en estadística y propone una tarea en la cual sean los mismos estudiantes quienes recojan la información a tabular por medio de una encuesta y un tema que sea de su interés. Por su parte, en la categoría de ejemplos, esta puede hacerse visible cuando un profesor propone diferentes ejercicios para explicar el rango de la función trigonométrica seno,por ejemplo, $f(x) = sen(x+3), f(x) = sen(x+7), f(x) = sen(x-7)$ o $f(x) = sen(x+9)$,

ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

o cuyo comportamiento depende de la constante que acompaña al argumento de la función con forma $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$, en este caso *a*.

El KMLS, **conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas**, en Español, corresponde al conocimiento del profesor acerca de los resultados de aprendizaje que espera tengan sus estudiantes dependiendo del nivel escolar en el que se encuentren, además del nivel de profundización con el que debe ser enfocado un contenido de matemáticas a partir de los niveles escolares y los estándares e indicadores nacionales e internacionales de aprendizaje, los cuales indican la organización de las temáticas con base en cursos previos (Muñoz-Catalán, Liñan y Ribeiro, 2017). En ese sentido, Flores-Medrano et al. (2014) presentaron una serie de categorías que profundizan el conocimiento especializado del profesor en este subdominio. Estas son: Conocimiento que tiene el profesor acerca de los contenidos matemáticos que se requieren en el grado escolar en el que se está impartiendo clases, conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un tópico en un determinado momento escolar y conocimiento de la secuenciación de diversos temas ya sea dentro del mismo curso o pensando en cursos anteriores o posteriores, las cuales se definen a continuación:

1. *Conocimiento que tiene el profesor acerca de los contenidos matemáticos que se requieren en el grado escolar en el que se está impartiendo clases*, este conocimiento puede ser adquirido por el profesor por medio de un documento que indique cuáles son esos contenidos o cuál es el nivel de abstracción que deben desarrollar los estudiantes en dichos grados. Por ejemplo, en los Derechos Básicos de Aprendizaje Volumen 2, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016) se evidencia que los estudiantes en los grados de primero a tercer grado deben tener la capacidad de resolver ejercicios de las operaciones básicas en matemáticas, lo cual debe ser de conocimiento del profesor que enseña matemáticas en educación básica primaria.
2. *Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un tópico en un determinado momento escolar* se refiere al conocimiento acerca de la profundidad con la que debe abordarse un contenido de acuerdo con un determinado ciclo escolar. Por ejemplo, saber qué tipo de clasificaciones entre polígonos se esperaría que un estudiante hiciera al finalizar la primaria (quinto grado).
3. *Conocimiento de la secuenciación de diversos temas ya sea dentro del mismo curso o pensando en cursos anteriores o posteriores* es el conocimiento del profesor acerca de las ideas o nociones previas que tiene un estudiante acerca de un contenido en término de lo que enmarca el contenido curricular, antes de conocer una temática a desarrollar. Por ejemplo, el conocimiento del profesor de las ideas de multiplicación que tienen sus estudiantes cuando profundizan esta operación matemática en el tercer grado.

Aplicación del MTSK en la Educación Matemática

El modelo MTSK ha tenido impacto significativo en la comunidad académica, especialmente en territorio español, país en el que surge en el año 2013 y en el que toma auge. No obstante, con el pasar del tiempo diversos autores han profundizado en este modelo, anexando nuevas categorías y características a cada uno de los subdominios de los dominios que conforman el mismo. En ese orden, desde el año en que se constituyó el modelo, se han realizado diversos artículos, capítulos de libro publicados por los miembros del grupo SIDM, tesis doctorales dirigidas por los miembros del grupo antes en mención y cinco Congresos Iberoamericanos sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas; congreso en el cual se discuten experiencias alrededor del uso del MTSK como herramienta para el análisis del quehacer docente, siendo el último congreso del MTSK, realizado en el mes de noviembre de 2021 en Brasil. De esta manera, estas acciones académicas han contribuido a formar la Red Iberoamericana MTSK, conformada por miembros de los siguientes países: España, Portugal, México, Costa Rica, Venezuela, Colombia, Ecuador, Perú, Chile, Brasil, Argentina y otros países europeos, como Italia y Alemania (Carrillo, 2019).

En ese orden ideas, son los profesores en formación inicial, profesores en ejercicio y profesores en formación continuada (profesores en ejercicio cursando estudios de perfeccionamiento), los participantes que en su mayoría han servido de muestra para las investigaciones referentes a la caracterización de su conocimiento especializado. En el caso de los profesores en formación inicial, se ha explorado acerca del conocimiento especializado de los profesores que se están formando para ser profesores de Educación Básica Primaria; no obstante, en este modelo es aún una deuda la exploración del conocimiento especializado de profesores de matemáticas que se están formando para la Educación Básica Secundaria o Media acerca de la enseñanza de cualquier contenido de las matemáticas relacionados con estos niveles de escolaridad, muy a pesar que Muñoz y Montes (2016) aseguran que en el contexto de la educación secundaria es relevante este modelo debido al énfasis que se hace al conocimiento didáctico-pedagógico de los contenidos, el cual en la realización de procesos de investigación ha sido escasamente explorado, a pesar de que es muy común encontrar en los salones de clases evidencias de subdominios del MTSK como es el caso del KMT y KFLM en los procesos de enseñanza. En cuanto a los profesores en ejercicio, ocurre un caso contrario a los profesores en formación inicial. Esto es, al ser profesores que ejercen su rol y su práctica día a día, han sido más explorados con respecto a su conocimiento sobre la enseñanza de diversos contenidos de las matemáticas.

Muñoz y Montes (2016) también resaltan la importancia de estudiar el modelo MTSK en el contexto de profesores de educación infantil, puesto que le permite otorgar mayor profundidad y rigor matemático al conocimiento que exponen los profesores, ya que, a pesar del carácter elemental de los conceptos en este nivel académico, es necesario que quien enseña tenga claridad de dónde, para qué y por qué surge lo que enseña. Es por eso que uno de los desafíos a futuro de este modelo, es expandirse al profesorado de Educación infantil en Matemáticas, ya que en muchas ocasiones los profesores que enseñan en estos niveles de escolaridad no cuentan con formación en matemáticas.

No obstante, son múltiples los diferentes contenidos que han sido estudiados de acuerdo con el modelo MTSK. En las más recientes Actas del Seminario de Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas en la Universidad de Huelva del año 2017 y 2019 se evidenció que han sido explorados el conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas en temáticas tales como: resolución de problemas de magnitudes proporcionales (Barrera, Liñán y Pérez,2017); conocimiento emocional y especializado del profesor de matemáticas; conocimiento especializado para la enseñanza de la geometría en Educación Infantil (Escudero-Domínguez, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2017; Codes y Muñoz-Catalán, 2019; Escudero-Domínguez et al., 2019); las oportunidades de aprendizaje; el dominio del conocimiento matemático del MTSK también en educación infantil (Martín y Carrillo, 2017); el dominio afectivo y el MTSK (Pascual et al., 2019); el diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir del MTSK (Climent y Montes, 2019); conexiones de complejización y simplificación del KMS en educación primaria (Montañez-Esparza y Lizarde, 2019); y, el MTSK en la formación continua de profesores de matemáticas (Quiroga y Gamboa, 2017; Valenzuela-Molina y Ramos-Rodríguez, 2019). De este modo, es evidente que este modelo se ha ido expandiendo en cada uno de los pensamientos de las matemáticas, como por ejemplo el pensamiento métrico-geométrico y variacional en países como España y Portugal en Europa, y en Brasil, México y Chile en Latinoamérica.

Conclusiones

El modelo MTSK desarrollado por Carrillo y sus colaboradores en el año 2013, y potenciado en el año 2018 ha permitido la caracterización del conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas en cualquier nivel académico, tanto en el conocimiento matemático, como en el didáctico-pedagógico, no evidente de manera explícita en otros modelos que abordan el conocimiento del profesor de matemáticas. Este modelo sustenta a través de las categorías que se presentan para cada subdominio del dominio matemático y didáctico-pedagógico, que existen características del licenciado en matemáticas que los hace diferenciar de otros profesionales que asumen este rol en las escuelas colombianas, como es el caso de los ingenieros, matemáticos, estadísticos, físicos y otro tipo de profesional con formación en matemáticas. Así mismo, se evidenció que mediante este modelo es posible el análisis del conocimiento especializado de los temas, de las estructuras matemáticas, prácticas matemáticas, características de aprendizaje de las matemáticas, enseñanza de las matemáticas y estándares de aprendizaje de las matemáticas de contenidos particulares de las matemáticas, y que dada la amplitud del modelo permite la relación entre estos subdominios del mismo dominio o de dominios diferentes.

Aparte, se concluye que el MTSK es una oportunidad al estudio de una línea de investigación que relacione la formación de profesores con el conocimiento especializado de maestros en formación inicial, ya que mediante el análisis que se les haga a estos acerca de su conocimiento especializado en determinado tema de las matemáticas, existe la posibilidad de proponer planes de mejora en los programas que forman profesores de matemáticas. Por ello este modelo es una invitación a la reflexión del profesor en sus prácticas matemáticas y de tipo didáctico, ya que la misma especificidad que ofrece el MTSK, es una oportunidad para el estudio de nuevas líneas de investigación, como por ejemplo el estudio a profundidad del conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de las matemáticas en niveles de primaria o de nivel superior utilizando las TIC escasamente abordados mediante el modelo MTSK como referencial teórico.

De igual manera, es interesante que en Colombia se siga profundizando en la inserción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, como tema de interés a investigar en la Formación del Profesor de Matemáticas. Esto porque consideramos que es una buena oportunidad para divulgar la necesidad que implica

ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

en el país de que sean los licenciados en Matemáticas quienes sean los encargados de enseñar matemáticas en las escuelas. Ya que este modelo describe detalladamente el conocimiento con el que debe contar este tipo de profesionales para la enseñanza de contenidos de matemáticas.

Referencias bibliogáficas

Advíncula, E., Beteta, M., León, C., Torres, I. & Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para su investigación. *Revista Uniciencia, 35*(1), 1-21. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12

Aguilar-González., Muñoz-Catalán., & Carrillo, J. (2019). An Example of Connections between the Mathematics Teacher's Conceptions and Specialized Knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1-15. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Ball, D; Thames, M; & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barrera, V., Liñán, M., & Pérez, B. (2017). El conocimiento especializado de los estudiantes para maestro en la resolución de problemas de magnitudes proporcionales. Una propuesta didáctica. *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*, (pp. 81-85). Huelva: CGSE

Bromme, R. (1994). Beyond Subject Matter: A Psychological Topology of Teachers Professional Knowledge. In R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer, & B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Carrillo, J. (2019). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (7-12). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., & Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education,* 20(3), 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., & Muñoz, M. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics. *In Proceedings of the CERME* (Vol. 8, pp. 2985-2994)

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., & Ribero, M. (2017). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) in the "Dissecting an Equilateral Triangle" problem. Ripem, 7(2), 88-107.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Michigan: Proquest Michigan University.

Climent, N., & Montes, M. (2019). Diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK. IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, 60-68. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C., & Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. Educación Matemática, 33(1), 98-124. DOI: 10.24844/EM3301.04

Codes, M., & Muñoz-Catalán, M. (2019). El uso de un vídeo de animación para promover conocimiento especializado sobre medida en estudiantes para maestro de Educación Infantil. IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, 201-209. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones

Delgado, R., & Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Págs (1-21).

Escudero-Avila, D. y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Educación Matemática, 32(2), 8-38. DOI: 10.24844/EM3202.01

Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán,M., & Carrillo,J. (2017). MTSK: Conocimiento especializado para la enseñanza de la geometría en la etapa infantil. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemáticas de la Universidad de Huelva, 119-124. Huelva: CGSE

Escudero-Domínguez, A., Escudero-Ávila,D., Aguilar-González, A., & Vasco,D. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en Educación Infantil para la enseñanza de geometría. IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, 219-227. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Espinosa-Vásquez,G., Zakaryan,D., & Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21(3), 301-324. DOI:10.12802/relime.18.2133

Fennema, E., & Franke, M. (1992). Teachers' Knowledge and its impact. In D.A. Grows (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 147 – 164). Macmillan Publishing Co, Inc

Flores-Medrano, E., Escudero, D., Montes, M., Aguilar, Álvaro., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Publisher Universidad de Huelva Publicaciones.* Págs (57 -72)

Flores-Medrano, E., Sosa, L., & Ribeiro, C. (2016). *Tránsito del MKT al MTSK.* Actas de la II Jornada del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Huelva. Págs (7 -11). Huelva

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz, M., & Liñan, M. (2016). El papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemáticos. Bolema - Mathematics Education Bulletin, 30(54), 204 -221. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Martín, J., & Carrillo, J. (2017). Las oportunidades de aprendizaje y el dominio de conocimiento matemático del MTSK en educación infantil. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemáticas de la Universidad de Huelva, 97-101. Huelva: CGS

MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje V.2. Bogotá: MEN

Montañez-Esparza, M., Lizarde, E. (2019). Conexiones de simplificación y complejización en la enseñanza de la multiplicación de fracción por natural en la escuela primaria. IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (149-157). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Montes, M. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito: un estudio de caso*. Universidad de Huelva, Departamento de Didáctica de las Ciencias y la Filosofía. Tesis Doctoral

Montes, M., Aguilar, A., Escudero, D., Moriel, J., Contreras, L., & Climent, N. (2017). *Problemas de la Educación Matemática donde la contribución del MTSK puede ser relevante*. Actas de la III Jornada del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Huelva, Págs (68 – 70).

ISSN (electrónico): 2346-0806 ISSN (impreso): 1794-8932

Montes, M., Climent, N., Carrillo, J., & Contreras, L. (2020). Constructing tasks for primary teacher education from the perspective of Mathematics Teachers' Specialised Knowledge. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. hal-02430479f

Muñoz, M., & Montes, M. (2016). *La investigación sobre MTSK en las distintas etapas educativas.* Actas de la II Jornada del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Huelva, Págs (87- 93). Huelva

Muñoz-Catalán,M., Liñan, M., & Ribeiro,M. (2017). Conocimiento especializado para enseñar la operación resta en educación infantil. Cadernos de Pesquisa, 24, 4-19. http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. (2020). El conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas: Mediaciones con TIC para funciones trigonométricas. Serie Educar- Editorial Poisson, 109-118. DOI:10.36229/978-65-86127-63-8.CAP.13

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. Eco Matemático, 12(1), 93-106. DOI 10.22463/17948231.3072

Pascual, M., Fernández-Gago, J., García, M., Marbán, J., & Maroto, A. (2019). El dominio afectivo y MTSK. IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, 32-40. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Quiroga, F., & Gamboa, M. (2017). Contribución del MTSK en la elaboración del plan de formación de profesores de matemáticas. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, 125-130. Huelva: CGSE

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic New York: Books.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *American Educational Research Association*. Págs (4 - 14)

Valenzuela-Molina, M., & Ramos-Rodríguez, E. (2019). IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, 228-238. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Vasco, D., & Climent, N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. PNA, Págs (129 – 146), Vol. 12(3).

Vasco, D., Climent, N., Escudero, D., Montes, M., & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, Págs (222-239), Vol. 30(54).

Zakaryan, D., & Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. Educación Matemática, 33(1), 71-97. DOI: 10.24844/EM3301.03