Sophia

Volumen 22, número 1, 2026, p: e1664 | págs. 1-19
ISSN 2346-0806
DOI: https://doi.org/10.18634/sophiaj.22v.1i.1664

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

# Las funciones matemáticas en la educación media: estudio comparativo entre las Bases Curriculares de Chile y los Principles and Standards for School Mathematics del NCTM

*Mathematical Functions in Secondary Education: A Comparative Study between Chile's Curricular Bases and the NCTM's Principles and Standards for School Mathematics*

Luis Hernández Benítez[1,2*], Paula López-Serentill[1], Abraham de la Fuente[3]
[1]Universitat de Girona
[2]Universidad Católica de Temuco
[3]Universitat Autònoma de Barcelona
[*]Autor para la correspondencia: luishb8511@gmail.com

## Resumen

**Introducción**: El concepto de función matemática es un eje del razonamiento algebraico y la modelización, pero la distribución de sus familias a lo largo de la trayectoria escolar varía entre currículos. **Objetivos**: Analizar comparativamente la presencia, progresión y cobertura de las funciones matemáticas en las Bases Curriculares de Educación Media de Chile y en el estándar de álgebra de los *Principles and Standards for School Mathematics (PSSM)* del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) de Estados Unidos, desde el marco de la oportunidad de aprender. **Materiales y métodos**: Se desarrolló un estudio descriptivo, de enfoque cualitativo-cuantitativo, mediante análisis documental y de contenido de las Bases Curriculares chilenas (2016, 2019a) y de los *PSSM* del NCTM (2000). Se examinaron objetivos de aprendizaje (OA) o expectativas, que se codificaron según cuatro criterios de contenido funcional (F1-F4) considerando familias de funciones. **Resultados**: La formación general chilena presenta una cobertura funcional del 43,8 % de 7.º básico a 2.º medio y del 25,0 % en 3.º y 4.º medio; estos últimos incorporan las funciones exponencial, logarítmica, potencia, seno y coseno. Los 5 OA del electivo Límites, derivadas e integrales de la formación diferenciada humanístico-científica abordan composición e inversa, límites, derivadas e integral. El estándar de álgebra del NCTM para los grados 9.º a 12.º presenta contenido funcional en 10 de 15 expectativas (66,7 %) y propone una trayectoria integrada. Los porcentajes son indicadores internos y no son directamente comparables. **Conclusiones**: Las familias de funciones no lineales avanzadas se formalizan en la formación general chilena hacia el final de la educación media y en pocos OA, y la formación diferenciada profundiza en cálculo; el NCTM las incluye en un solo estándar para los grados 9.º a 12.º. Esta distribución configura oportunidades de aprendizaje prescritas diferenciadas, potencialmente relevantes para la preparación universitaria en áreas STEM. Sin embargo, estos resultados descriptivos no permiten establecer efectos sobre los aprendizajes efectivos ni caracterizar la implementación curricular efectivamente realizada en las aulas.

**Palabras clave**: Currículo comparado; educación media; función matemática; oportunidades de aprendizaje; razonamiento algebraico.

## Abstract

**Introduction**: The concept of mathematical function is a central component of algebraic reasoning and modeling, but the distribution of function families across students' schooling varies among curricula. **Objectives**: To comparatively

**Recibido: 13/07/2026 - Aceptado: 04/11/2026 - Publicado: 14/11/2026**

**Cómo citar:**
Hernández Benítez, L., López-Serentill, P., & de la Fuente, A. (2026). Las funciones matemáticas en la educación media: estudio comparativo entre las Bases Curriculares de Chile y los Principles and Standards for School Mathematics del NCTM. *Sophia*, 22(1). https://revistas.ugca.edu.co/index.php/sophia/article/view/1664
Conflicto de intereses: Los autores declaran no tener conflictos de intereses.
Contribución de los autores: Los autores han participado en la redacción del trabajo y análisis de los documentos.
Fuente de financiamiento: La investigación fue financiada con recursos propios.

Esta obra está bajo una Licencia Atribución/Reconocimiento 4.0 Internacional.
Sophia. Copyright 2026. Universidad La Gran Colombia.

analyze the presence, progression, and coverage of mathematical functions in Chile's Secondary Education Curricular Bases and in the Algebra Standard of the Principles and Standards for School Mathematics (PSSM) of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), United States, within the framework of opportunity to learn. **Materials and methods**: A descriptive study with a mixed qualitative-quantitative approach was conducted through document analysis and content analysis of the Chilean Curricular Bases (2016, 2019a) and the NCTM's PSSM (2000). Learning objectives (LOs) or expectations were examined and coded according to four functional-content criteria (F1-F4), considering function families. **Results**: In Chile's general education, functional content accounted for 43.8% of learning objectives from 7th grade of primary education through 2nd year of secondary education, and 25.0% from 3rd to 4th year of secondary education; the latter incorporate exponential, logarithmic, power, sine, and cosine functions. The five learning objectives of the elective course Limits, Derivatives, and Integrals, within the humanities-science differentiated pathway, address function composition and inverse functions, limits, derivatives, and integrals. The NCTM Algebra Standard for grades 9-12 includes functional content in 10 of its 15 expectations (66.7%) and proposes an integrated progression. These percentages are internal indicators and are not directly comparable. **Conclusions**: Advanced nonlinear function families are formalized toward the end of Chilean general education and in only a few learning objectives, while differentiated education deepens calculus content; the NCTM includes them within a single standard for grades 9-12. This distribution establishes differentiated prescribed opportunities to learn, which may be relevant for university preparation in STEM fields. However, these descriptive findings do not allow conclusions about effects on actual learning or the characterization of curriculum implementation as it occurs in classrooms.

**Keywords**: Algebraic reasoning; comparative curriculum; mathematical function; opportunities to learn; secondary education.

## Introducción

El concepto de función matemática es reconocido como uno de los pilares fundamentales de las matemáticas (Spivak, 2012) y actúa como el eje unificador del álgebra escolar (Kaput, 2008). Su evolución histórica refleja una tensión epistemológica entre dos concepciones centrales: la función como correspondencia estática entre conjuntos y como relación de covariación entre magnitudes variables (Confrey & Smith, 1995; Thompson & Carlson, 2017). Esta dualidad condiciona profundamente su tratamiento didáctico en la educación media, donde el dominio del pensamiento funcional resulta indispensable para el tránsito hacia el pensamiento abstracto y la modelización en disciplinas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés; Blanton et al., 2018).

En el ámbito curricular, la inclusión de las funciones responde a su capacidad para operar como una herramienta articuladora entre el álgebra, la geometría y la modelización de fenómenos reales (Azcárate & Deulofeu, 1990; Steketee & Scher, 2016). Diversas tendencias pedagógicas subrayan que su enseñanza debe trascender la manipulación algorítmica mediante el análisis cualitativo de gráficas (Best & Bikner-Ahsbahs, 2017), la resolución de problemas en contextos auténticos (Soneira et al., 2023) y el tránsito fluido entre registros de representación verbal, tabular, gráfico y simbólico (Duval, 2006, 2017). Asimismo, la integración de entornos dinámicos y herramientas tecnológicas potencia la comprensión de la covariación continua desde etapas escolares tempranas (Johnson et al., 2020; Moukhliss et al., 2023).

Pese a este consenso sobre su relevancia didáctica, la organización curricular y la distribución de las familias de funciones a lo largo de la trayectoria escolar varían sustancialmente entre los sistemas educativos. En el caso de Chile, las Bases Curriculares del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2012, 2016, 2019a) organizan la enseñanza de las funciones en una formación general (FG), común y obligatoria de 7.º básico a 4.º medio y una Formación Diferenciada (FD) o Electiva organizada para 3.º y 4.º medio. Por su parte, los PSSM del NCTM (2000) de Estados Unidos constituyen un marco profesional de carácter orientador que posiciona el pensamiento funcional como una trayectoria longitudinal integrada desde los niveles iniciales hasta el grado 12.º.

Aunque la literatura especializada analiza ampliamente los procesos de aprendizaje del concepto de función y las dificultades asociadas a sus registros de representación (Parra-Urrea & Pino-Fan, 2022; Trujillo et al., 2023), así como los niveles de razonamiento algebraico presentes en los libros de texto

escolares del contexto chileno (Llanes Luna et al., 2022), existe un vacío en la investigación curricular comparada. Se desconoce cómo las estructuras normativas prescriben y condicionan el acceso a familias específicas de funciones en la Formación General frente a las vías de especialización.

En el contexto chileno, la distribución y profundización de las familias de funciones entre niveles y entre formación general y formación diferenciada configuran oportunidades de aprendizaje prescritas que, desde el marco de la oportunidad de aprender (ODA), pueden resultar relevantes para el desarrollo del pensamiento covariacional, la articulación con la educación superior y el desempeño en áreas STEM (McDonnell, 1995; Schmidt et al., 2011, 2015). Frente a esta problemática, se formula la siguiente pregunta central de investigación:

¿De qué manera se distribuye y articula la presencia del concepto de función matemática en los documentos normativos de la Educación Media de Chile (MINEDUC, 2012, 2016, 2019a) en comparación con el marco de estándares profesionales del NCTM (2000), y qué oportunidades diferenciadas de aprendizaje se desprenden de sus respectivas estructuras de organización curricular?

Para responder a esta interrogante, el objetivo general del estudio es:

Analizar comparativamente la presencia y progresión del concepto de función matemática en las Bases Curriculares de Educación Media de Chile (MINEDUC, 2012, 2016, 2019a) y en los PSSM del NCTM (2000), evaluando la distribución de las familias de funciones entre la formación general y la formación diferenciada desde la perspectiva de la oportunidad de aprender.

## Fundamentación didáctica y marcos de referencia curricular

El tratamiento curricular moderno de las funciones se fundamenta en la necesidad de conectar la abstracción algebraica con la comprensión de fenómenos del mundo real mediante tareas de modelización (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Desde los principios del *early algebra*, se sostiene que la coordinación entre variables cuantitativas y el pensamiento funcional no deben postergarse hasta la adolescencia tardía, sino desarrollarse progresivamente desde la educación básica (Blanton & Kaput, 2011; Carraher et al., 2008). La evidencia respalda que los estudiantes de niveles iniciales poseen la capacidad cognitiva para conceptualizar la dirección del cambio cuando interactúan con entornos variacionales dinámicos (Paoletti et al., 2022). Omitir o postergar la explicitación del razonamiento covariacional limita el desarrollo de las acciones mentales que fundamentan el estudio posterior del cálculo infinitesimal (Carlson et al., 2002; Digel et al., 2023; Thompson & Carlson, 2017).

El marco normativo chileno organiza el contenido funcional en el eje de Patrones y Álgebra (MINEDUC, 2012) y en el eje de álgebra y funciones de 7.º básico a 2.º medio (MINEDUC, 2016), orientando su enseñanza hacia el desarrollo de cuatro habilidades transversales: resolver problemas, modelizar, representar y argumentar/comunicar. A partir de la reestructuración curricular establecida en el Decreto N.º 193 de 2019 (MINEDUC, 2019b), la Matemática de la formación general para 3.º y 4.º medio incorpora el estudio y la utilización de exponenciales, logarítmicas, potenciales y trigonométricas en contextos de modelación, como parte de un currículo prescrito común. La formación diferenciada humanístico-científica, regulada por el mismo decreto, ofrece itinerarios de especialización; entre ellos, el electivo Límites, derivadas e integrales, que aborda la composición e inversa de funciones, los límites, la derivada y la integral (MINEDUC, 2019a, 2021). La presencia prescrita de estos contenidos no permite, por sí sola, inferir diferencias en los aprendizajes efectivamente alcanzados.

En contraste, el marco de estándares del PSSM del NCTM (2000) actúa como una referencia profesional estadounidense que promueve una visión integrada del Estándar de Álgebra para los grados 9.º a 12.º. Si bien en el sistema educativo descentralizado de Estados Unidos los currículos normativos son adoptados de manera autónoma por los estados y distritos, los PSSM del NCTM (2000) constituyen un referente profesional que propone expectativas para el estándar de álgebra en dichos grados, entre ellas el análisis de diversas familias de funciones, la tasa de cambio y la modelización de relaciones cuantitativas. Su carácter orientador no equivale a una prescripción curricular nacional uniforme.

## Metodología

Para responder a la pregunta de investigación y cumplir con el objetivo de analizar comparativamente la presencia y progresión del concepto de función matemática en las normativas curriculares de Chile y el marco del NCTM (2000), se diseñó un estudio descriptivo y cualitativo-cuantitativo basado en el análisis documental (Cellard, 2005) y el análisis de contenido (Krippendorff, 2019). Este enfoque permite examinar la estructura del currículo prescrito y evaluar las oportunidades diferenciadas de aprendizaje que se proyectan hacia la educación superior y el acceso a las carreras STEM.

### Corpus documental

El corpus de análisis estuvo integrado por los documentos de referencia de ambos marcos. Para el caso chileno, se examinaron las *Bases Curriculares de Educación Básica y Media* del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2016) para el tramo de 7.º Básico a 2.º Medio y las *Bases Curriculares de Matemáticas* de formación general para 3.º y 4.º Medio (MINEDUC, 2019a), promulgadas mediante el Decreto N.º 193 de 2019 (MINEDUC, 2019b), en su plan de formación general de matemáticas; y, dentro de la formación diferenciada humanístico-científica, el electivo Límites, derivadas e integrales (MINEDUC, 2019a, 2021). Las bases curriculares de 1.º a 6.º básico (MINEDUC, 2012) se consideraron solo como contexto de la progresión y no fueron codificadas. Para el referente de Estados Unidos, se analizaron los PSSM del NCTM (2000), focalizando la atención en el Estándar de Contenido de Álgebra (*Algebra Strand*) fijado para el bloque de grados 9.º a 12.º.

**Tabla 1**

*Corpus documental objeto de análisis curricular comparado*

| Sistema / Marco | Documento Curricular Analizado | Tramo Escolar |
|---|---|---|
| Chile (MINEDUC) | Bases Curriculares de Matemática (MINEDUC, 2016) | 7.º Básico a 2.º Medio |
| Chile (MINEDUC) | Bases Curriculares Matemáticas formación general (MINEDUC, 2019a) | 3.º y 4.º Medio |
| Chile (MINEDUC) | Bases Curriculares Matemáticas FD HC, electivo Límites, derivadas e integrales (MINEDUC, 2019a, 2021) | |
| Estados Unidos (NCTM) | PSSM del NCTM (2000) | Grados 9.º a 12.º |

*Nota.* Elaborada por los autores con base en MINEDUC (2016, 2019a, 2021) y NCTM (2000). Las bases curriculares de 1.º a 6.º básico (MINEDUC, 2012) se consideraron solo como contexto.

### Unidad de análisis y categorías de codificación

Cada OA completo del corpus chileno y cada expectativa del estándar de álgebra del NCTM (2000) constituyó una unidad de análisis. En el corpus chileno se consideraron los OA de conocimiento y comprensión, y se excluyeron los de habilidades y actitudes. Una unidad se clasificó como incluida cuando cumplía al menos uno de los siguientes criterios de contenido funcional: F1, identificación expresa de funciones o dependencias funcionales; F2, generalización de una regla de dependencia, explícita o recursiva; F3, representación, análisis o transformación de funciones o relaciones de variación; y F4, utilización de una función como modelo de una situación. Los códigos F1-F4 no son excluyentes, pero cada unidad se contabilizó una sola vez en $N_f$. La presencia aislada de términos como "modelo", "relación", "tabla" o "gráfico", o la posible utilización de funciones durante la implementación de un OA, no se consideró suficiente para la inclusión; si la vinculación derivaba únicamente del bloque curricular o de posibles actividades, se registró como vinculación contextual y no se incorporó al recuento principal.

Se establecieron cuatro categorías operacionales de codificación. La primera corresponde al filtro de inclusión funcional y las tres restantes a la caracterización de las unidades ya incluidas.

**Inclusión funcional:** criterio F1-F4 descritos anteriormente.

**Familia de funciones:** Identificación del tipo de función abordado (lineal, afín, cuadrática, polinómica, racional, exponencial, logarítmica, trigonométrica o periódica, compuesta e inversa).

**Registros de representación semiótica:** Identificación de los registros exigidos en la prescripción, siguiendo el marco de Duval (2006, 2017) (verbal, tabular, gráfico, algebraico/simbólico y contextual/pictórico).

**Demanda cognitiva:** Clasificación del nivel de procesamiento mental requerido por el enunciado según la Taxonomía Revisada de Anderson y Krathwohl (2001) (*Recordar*, *Comprender*, *Aplicar*, *Analizar*, *Evaluar* y *Crear*).

### Procedimiento de codificación, consistencia y limitaciones

El procedimiento de codificación se realizó mediante una matriz de análisis de contenido (Anexos A.1 a A.6), que identifica cada unidad, su descriptor, los criterios asignados y la justificación de su inclusión o exclusión. La codificación fue realizada por el autor principal y sometida a una revisión independiente por parte de una segunda investigadora del equipo, resolviendo las posibles discrepancias mediante consenso. Dado que el análisis se centró exclusivamente en el currículo prescrito y en normativas oficiales, se reconoce como una limitación del estudio que los hallazgos describen las oportunidades de aprender (ODA) normativas e institucionales, y no la implementación efectiva en el aula ni el currículo logrado por los estudiantes.

### Cálculo de la intensidad curricular y cobertura efectiva

Para estimar la presencia de contenido funcional en cada corpus, se calculó el porcentaje de unidades que cumplían al menos uno de los criterios F1-F4. Los porcentajes se obtuvieron mediante la siguiente fórmula general:

$$P = \left(\frac{N_f}{N_t}\right) \times 100\%$$

Donde:

$N_f$: Número de OA o Estándares incluidos por cumplir un criterio F1-F4.

$N_t$: Número total de OA o Estándares analizados en el corpus correspondiente.

Dado que la extensión y el nivel de detalle de un Objetivo de Aprendizaje MINEDUC (2016, 2019a) y de una expectativa del NCTM (2000) obedecen a estructuras normativas distintas, y que los corpus difieren en su alcance (eje álgebra y funciones en 7.º básico a 2.º medio, totalidad de los OA de conocimiento y comprensión de la formación general 3.º y 4.º medio y expectativas del Estándar de álgebra en el NCTM), los porcentajes no se consideran medidas de masa curricular directamente comparables, sino indicadores descriptivos internos de presencia de contenido funcional dentro de cada corpus.

#### Fórmulas de intensidad curricular interna:

Formación General chilena (MINEDUC, 2016; 7.º básico a 2.º medio):

De un total de $N_t = 16$ OA pertenecientes al eje Álgebra y funciones, $N_f = 7$ cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4.

$$P_{Chile-FG} = \left(\frac{7}{16}\right) \times 100\% = 43{,}8\%$$

Formación general chilena (MINEDUC, 2019a; 3.º y 4.º medio):

En el programa de Matemática de la Formación general, de $N_t = 8$ OA totales, $N_f = 2$ cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4.

$$P_{Chile-FG\ 3.º\ y\ 4.º} = \left(\frac{2}{8}\right) \times 100\% = 25\%$$

Formación diferenciada HC chilena (MINEDUC, 2019a, 2021; 3.º y 4.º medio):

En el programa de Matemática de la Formación diferenciada, de $N_t = 5$ OA totales, $N_f = 5$ cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4.

$$P_{Chile-HC\ 3.º\ y\ 4.º} = \left(\frac{5}{5}\right) \times 100\% = 100\%$$

Este valor refleja el carácter especializado del electivo y no se interpreta como una medida de intensidad comparable con las anteriores.

Estándar de Álgebra (NCTM, 2000; grados 9.º a 12.º):

De un total de $N_t = 15$ expectativas del Estándar de Álgebra para la educación secundaria, $N_f = 10$ cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4.

$$P_{NCTM} = \left(\frac{10}{15}\right) \times 100\% = 66{,}7\%$$

### Cota superior del acceso formal a funciones avanzadas en Chile:

Para dimensionar el alcance potencial del electivo (Límites, derivadas e integrales) se consideró la distribución de la matrícula por modalidad en 3.º y 4.º medio. Dado que los electivos de matemática pertenecen exclusivamente al flujo Humanístico-Científico (HC), la proporción de matrícula HC constituye una cota superior del acceso formal por esa vía:

$$C_{máx} = M_{HC} = 280.135 / 442.153 = 63{,}4\ \%$$

donde $M_{HC}$ es la matrícula HC de 3.º y 4.º medio de jóvenes sobre el total de esa matrícula, con datos de 2021 (MINEDUC, Centro de Estudios, 2022). Este valor es un máximo, no una estimación de cobertura: el acceso efectivo depende además de la oferta de cada establecimiento y de la elección individual de los estudiantes, información no disponible públicamente y que queda fuera del alcance de este estudio.

## Resultados

El análisis de contenido documental de las *Bases Curriculares* de Chile (MINEDUC, 2012, 2016, 2019a) y de los PSSM de NCTM (2000) permitió identificar tanto zonas de convergencia pedagógica como diferencias en la distribución de las familias de funciones a lo largo de la trayectoria escolar.

### Progresión curricular del concepto de función

Ambos marcos curriculares conciben la función matemática como un objeto que debe desarrollarse de forma longitudinal y recursiva a lo largo de la escolaridad. La Tabla 2 y la Tabla 3 sintetizan las trayectorias prescritas en el PSSM del NCTM (2000) y en las Bases Curriculares del MINEDUC (2012, 2016, 2019a), respectivamente.

**Tabla 2**

*Progresión del concepto de función por niveles escolares según el NCTM (2000)*

| Nivel Escolar | Enfoque Principal | Conceptos Clave |
|---|---|---|
| Pre-K a 2.º | Patrones y Relaciones | Reconocimiento y extensión de patrones; uso de lenguaje informal para describir relaciones de cambio; introducción intuitiva de variables. |
| Grados 3.º a 5.º | Generalización y Reglas | Uso de expresiones simbólicas y tablas; descripción de relaciones cuantitativas utilizando funciones simples (operaciones básicas). |
| Grados 6.º a 8.º | Formación del Concepto | Función como relación única (entrada-salida); uso de coordenadas y representaciones gráficas para funciones lineales; introducción a la razón de cambio. |
| Grados 9.º a 12.º | Análisis y Modelización | Definición formal (dominio, rango, inversas); comparación de familias de funciones; uso de tecnología para explorar comportamientos complejos; análisis de tasa de cambio. |

*Nota.* Síntesis elaborada por los autores con base en NCTM (2000, pp. 91-95, 158-163, 222-231, 296-308).

**Tabla 3**

*Progresión del concepto de función en el currículo chileno según el MINEDUC (2012, 2016, 2019a)*

| Nivel Escolar | Enfoque Principal | Objetivos de Aprendizaje Clave (OA) |
|---|---|---|
| 1.º a 6.º Básica | Patrones y Generalización | Identificación, descripción y registro de patrones numéricos y secuencias. Se introducen relaciones que preparan el pensamiento algebraico y la noción intuitiva de covariación (MINEDUC, 2012). |
| 7.º Básico a 2.º Medio (FG) | Relaciones y Funciones Lineales | Formalización del concepto de función lineal y afín. Se enfatiza el uso de representaciones múltiples y el análisis de la pendiente (*m*) como tasa de cambio. Estudio de la función cuadrática en 2.º medio (MINEDUC, 2016). |
| 3.º y 4.º Medio (FG) | Análisis y Modelización Avanzada | Profundización en modelización de fenómenos. Estudio de funciones lineales y cuadráticas. No se introducen nuevas familias de funciones (MINEDUC, 2019a). |
| 3.º y 4.º Medio (FD HC) | Análisis del cambio | Estudio de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Análisis de transformaciones y resolución de problemas de optimización (MINEDUC, 2019a, 2021). |

*Nota.* Síntesis elaborada por los autores con base en MINEDUC (2012, pp. 86-128; 2016, pp. 94-127; 2019a, pp. 102-111). FG: formación general; FD HC: formación diferenciada humanístico-científica.

## Convergencias didácticas y metodológicas

La comparación cualitativa revela que ambos marcos coinciden en situar a la función como un eje integrador del álgebra y en promover la modelización matemática mediante la conversión entre registros de representación semiótica (Duval, 2006, 2017). Asimismo, se valora el uso de herramientas tecnológicas (GeoGebra, calculadoras gráficas) como mediadores para el análisis del comportamiento dinámico de las variaciones. La Tabla 4 presenta el contraste sintético de estos enfoques.

**Tabla 4**

*Comparación de enfoques curriculares: NCTM (2000) frente a MINEDUC (2016, 2019a)*

| Aspecto | NCTM (2000) | MINEDUC (2016, 2019a) |
|---|---|---|
| Eje Central | Patrones, Relaciones y Funciones. La función es el concepto unificador del álgebra escolar (grados 9.º a 12.º). | Álgebra y funciones (con énfasis en la modelización). La función es el núcleo temático para la enseñanza media. |
| Definición de Función | Énfasis en la relación de dependencia o covariación y en la arbitrariedad (no todas las funciones requieren una fórmula). | Énfasis en la relación de dependencia y en la modelización de situaciones y fenómenos reales. |
| Representaciones | Estándar explícito. Requiere que el estudiantado use y conecte registros tabulares, gráficos, algebraicos y verbales. | Habilidad clave. Modelización matemática mediante el tránsito fluido entre registros. |
| Uso de Tecnología | Fomentado como herramienta esencial para el análisis gráfico y la visualización del comportamiento dinámico. | Incorporado en los Objetivos de Aprendizaje (OA) como recurso para la representación y el análisis (ej. GeoGebra). |

*Nota.* Síntesis elaborada por los autores con base en NCTM (2000) y MINEDUC (2016, 2019a).

## Presencia de contenido funcional y demanda cognitiva

A modo descriptivo, se calculó la proporción de unidades con contenido funcional mediante la expresión $P = \left(\frac{N_f}{N_t}\right) \times 100\%$, donde $N_t$ corresponde al total de unidades del corpus seleccionado y $N_f$, a

aquellas que cumplen al menos uno de los criterios de codificación F1-F4. El procedimiento se organizó mediante matrices de análisis de contenido (Cellard, 2005; Krippendorff, 2019), presentadas en el anexo A, que identifican cada unidad, su descriptor, los criterios asignados y la justificación de su inclusión o exclusión.

Cada unidad se contabilizó una sola vez, aunque cumpliera varios criterios. Adicionalmente, las unidades incluidas se clasificaron según la Taxonomía Revisada de Anderson y Krathwohl (2001), atendiendo al proceso cognitivo requerido por la tarea descrita y no únicamente al verbo utilizado.

**Tabla 5**

*Presencia de contenido funcional y nivel cognitivo predominante en los corpus curriculares analizados.*

| Documento Curricular y corpus | Total de OA/ estándares($N_t$) | OA/ Estándares Dedicados a Funciones ($N_f$) | Porcentaje de Cobertura (P) | Nivel Cognitivo Predominante |
|---|---|---|---|---|
| **NCTM (2000) grado 9.º a 12.º** | 15 | 10 | 66,7 % | Analizar/ Crear |
| **MINEDUC (2016) 7.º a 2.º medio** | 16 | 7 | 43,8 % | Aplicar/ Analizar |
| **MINEDUC (2019a) 3.º a 4.º medio FG** | 8 | 2 | 25,0 % | Analizar/ Evaluar |
| **MINEDUC (2019a, 2021) 3.º a 4.º medio FD HC** | 5 | 5 | 100 % | Analizar/ Evaluar |

*Nota.* Elaboración propia mediante la aplicación de los criterios F1-F4 (Anexo A). El porcentaje se calculó mediante $P = (N_f/N_t)x100$. Cada unidad se contabilizó una sola vez, aunque cumpliera varios criterios. Los corpus difieren en su alcance y granularidad: expectativas del estándar de Álgebra del NCTM, OA del eje Álgebra y funciones de MINEDUC (2016) y totalidad de OA de conocimiento y comprensión de Matemática de Formación General de MINEDUC (2019a). Por ello, los porcentajes son indicadores descriptivos internos y no medidas directamente equivalentes de intensidad curricular, tiempo de enseñanza, cobertura estudiantil o aprendizaje efectivo. El 100,0 % del electivo refleja su carácter especializado.

Como se observa en la Tabla 5, se identificó contenido funcional en el 66,7% de las unidades analíticas del estándar de álgebra del PSSM del NCTM (2000) correspondiente a los grados 9.º a 12.º y en el 43,8% de los OA del eje álgebra y funciones de las bases curriculares chilenas de 7.º básico a 2.º medio (MINEDUC, 2016). En Matemática de formación general de 3.º y 4.º medio (MINEDUC, 2019a), dos de los ocho OA analizados (25,0 %) presentan contenido funcional, uno por nivel: el de 3.º medio, sobre funciones exponencial y logarítmica, y el de 4.º medio, sobre funciones potencia, seno y coseno. Los 5 OA del electivo Límites, derivadas e integrales presentan contenido funcional. Los porcentajes describen la presencia de contenido funcional dentro de cada corpus y, debido a sus diferencias de alcance y segmentación, no permiten establecer por sí solos una mayor o menor intensidad curricular ni una disminución de la enseñanza de funciones entre los tramos escolares.

## Trayectorias curriculares y evaluaciones estandarizadas

Más allá de la presencia cuantitativa de contenido funcional, la comparación permite examinar diferencias en la secuenciación de las familias de funciones y en las oportunidades de profundización previstas en cada marco curricular. La Tabla 6 presenta esta progresión, distingue los contenidos de Formación General y Formación Diferenciada en el caso chileno y recoge su relación con los contenidos contemplados en las evaluaciones de acceso a la educación superior consideradas en el estudio.

**Tabla 6**

*Progresión del estudio de las funciones según el NCTM (2000) y el MINEDUC (2016, 2019a)*

| Contenido funcional | Chile (MINEDUC) | *NCTM (2000)* | Lectura descriptiva |
|---|---|---|---|
| Función y representaciones múltiples | FG: 8 básico (OA 07, OA 10) y 1 medio (OA 5) | AL1.2 | Coincidencia en la presencia prescrita. |

| Contenido funcional | Chile (MINEDUC) | *NCTM (2000)* | Lectura descriptiva |
|---|---|---|---|
| Función lineal y afín | FG: 8 básico (OA 07, OA 10) y 1 medio (OA 5) | Grados 6 a 8 (tabla 2) | Coincidencia en la presencia prescrita. |
| Función cuadrática | FG: 2 medio (OA 03) | Clase polinómica (AL1.5) | Coincidencia, con correspondencia aproximada: el NCTM no especifica la cuadrática. |
| Cambio exponencial y función exponencial | FG: 2 medio (OA 06, interés compuesto en forma recursiva) y 3 medio (OA 03) | Clase exponencial (AL1.5) | Coincidencia en la presencia. En Chile se distribuye en dos OA de niveles distintos; en el NCTM aparece en una expectativa del tramo 9 a 12 |
| Función logarítmica | FG: 3 medio (OA 3) | Clase logarítmica (AL1.5) | Coincidencia en la presencia, con la misma diferencia de distribución. |
| Potencia, seno y coseno | FG: 4 medio (OA 3) | Clase polinómica y periódica (AL1.5) | Coincidencia aproximada en la presencia |
| Composición e inversa | FG: 2 medio (OA 05, casos lineal y cuadrático). FD HC: electivo, caso general (OAC 01) | AL1.4 | Coincidencia en la presencia. En Chile, el tratamiento general queda en el electivo. |
| Funciones racionales y de dos variables | Sin OA codificado en A.4 a A.6 | Clase racional (AL1.5); dos variables (AL1.6) | Diferencia: sin correspondencia en los OA codificados |
| Tasa de cambio | FG: cambio constante (8 básico, OA10). FD HC: (OAC03) | AL1.3 y AL4.1 | Coincidencia parcial. El NCTM no distingue entre tasa media e instantánea en las expectativas codificadas. |
| Límite, derivada e integrales | FD HC: electivo (OAC 02, 04 y 05) | No incluidos en el estándar de álgebra | Diferencia: contenido de cálculo prescrito solo en el electivo chileno. |

*Nota.* Elaboración propia con base en los Anexos A.3 a A.6. AL: expectativas del Estándar de Álgebra del NCTM (Anexo A.3); FG: formación general; FD HC: formación diferenciada humanístico-científica. La correspondencia entre las clases de funciones del NCTM y las familias de las Bases Curriculares es aproximada.

Como se observa en la Tabla 6, ambos marcos coinciden en prescribir las familias lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica y trigonométrica o periódica, así como la composición e inversa de funciones. Las diferencias se concentran en tres aspectos. Primero, en la distribución: en Chile las familias se asignan a OA específicos de 2.º a 4.º medio, mientras que el NCTM las agrupa en una expectativa del tramo de los grados 9 a 12. Segundo, las funciones racionales y de dos variables no se identifican en los OA chilenos codificados. Tercero, el cálculo (límite, derivada e integral) se prescribe en Chile en el electivo de la formación diferenciada y no forma parte del Estándar de Álgebra del NCTM.

**Tabla 7**

*Evaluaciones de acceso a la educación superior asociadas a los contenidos funcionales analizados*

| Evaluación | Contenidos funcionales considerados | Relación con los corpus analizados |
|---|---|---|
| SAT (Estados Unidos) | Funciones exponenciales, polinómicas y trigonometría básica | Coinciden con las familias del estándar de álgebra (AL1.5). |
| AP Calculus (Estados Unidos) | Límites, derivadas e integrales | Similar en tipo de contenido al electivo Límites, derivadas e integrales; no equivale en nivel |
| PAES M1 (Chile) | Currículo de 7 básico a 2 medio | Corresponde al corpus del Anexo A.4 |
| PAES M2 (Chile) | Contenidos de M1 y del plan común de 3 y 4 medio | Corresponde a la FG de 3 y 4 medio (Anexo A.5). No incluye contenido exclusivo de electivo. |

*Nota.* Elaboración propia con base en College Board (2020, 2023), DEMRE (2024) y Sistema de Acceso a la Educación Superior (2023). La relación es descriptiva y no implica equivalencia entre pruebas.

Como se observa en la Tabla 7, los contenidos de la formación general de 3.º y 4.º medio se vinculan con la PAES M2, mientras que los contenidos exclusivos del electivo Límites, derivadas e integrales no

están incluidos en esa prueba. En Estados Unidos, el SAT considera familias de funciones coincidentes con las del Estándar de Álgebra del NCTM, y el cálculo escolar se canaliza a través de cursos y programas específicos como AP Calculus. Estas relaciones describen los contenidos contemplados por cada evaluación y no permiten establecer efectos sobre los resultados de los estudiantes.

## Discusión

Los resultados permiten discutir cómo las estructuras curriculares prescriben las oportunidades de aprender (ODA) respecto del concepto de función. Existe un consenso amplio sobre el valor unificador de la función para el razonamiento algebraico y la modelización (Kaput, 2008; Spivak, 2012), y el análisis lo confirma: ambos marcos la sitúan como eje del álgebra escolar, promueven la conversión entre registros de representación (Duval, 2006, 2017) y valoran el uso de tecnología (Johnson et al., 2020; Moukhliss et al., 2023). Las diferencias se observan en cómo distribuyen las familias de funciones.

En la formación general chilena, las funciones lineal, afín y cuadrática, la función inversa y el cambio porcentual constante se prescriben hasta 2.º medio. En 3.º y 4.º medio se incorporan las funciones exponencial y logarítmica (3.º medio) y potencia, seno y coseno (4.º medio), cada una en un OA (Tabla 6). Las familias no lineales avanzadas forman parte, por tanto, del currículo prescrito común, aunque se formalizan hacia el final de la educación media y en un número reducido de OA (2 de 8). El Estándar de Álgebra del NCTM las agrupa en una expectativa para los grados 9.º a 12.º (AL1.5), sin distribuirlas por cursos. Desde la literatura sobre razonamiento covariacional, que subraya la coordinación continua de la variación en distintos tipos de magnitudes (Carlson et al., 2002; Thompson & Carlson, 2017), esta distribución plantea la pregunta de cómo se articula, en la implementación, la progresión entre familias lineales y no lineales, algo que el currículo prescrito no permite responder. La demanda cognitiva predominante (Tabla 5) debe leerse con cautela, especialmente en la formación general de 3.º y 4.º medio, donde solo dos OA presentan contenido funcional.

La formación diferenciada HC ofrece el electivo Límites, derivadas e integrales, cuyos 5 OA abordan composición e inversa, límites, derivada e integral. Este contenido no forma parte del Estándar de Álgebra del NCTM; en Estados Unidos, el cálculo escolar se canaliza mediante cursos específicos, como AP Calculus (Tabla 7). Como el electivo pertenece exclusivamente a la formación diferenciada HC, su acceso formal está acotado por la matrícula HC de 3.º y 4.º medio (63,4 %), un máximo que no considera la oferta de cada establecimiento ni la elección individual. Desde la perspectiva de la ODA (McDonnell, 1995; Schmidt et al., 2015), la oportunidad prescrita de estudiar cálculo depende de la modalidad y de una elección, mientras que las familias no lineales avanzadas forman parte del tramo común.

La relación entre currículo y evaluación cobra relevancia al considerar las demandas de las evaluaciones internacionales. De acuerdo con el marco de evaluación del Programme for International Student Assessment (PISA) de la Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD, 2023), los ítems ubicados en los Niveles de Competencia 5 y 6 requieren modelizar situaciones complejas, comparar y coordinar múltiples representaciones, justificar procedimientos y emplear razonamiento abstracto y formal. En este contexto, la manera en que el currículo prescrito distribuye las familias de funciones no lineales a lo largo de la educación media resulta pertinente para el desarrollo de competencias de alta demanda cognitiva. Sin embargo, PISA evalúa a estudiantes de 15 años, es decir, antes del tramo de 3.º y 4.º medio, por lo que su vínculo con la distribución analizada es indirecto y no permite establecer relaciones causales.

Al interpretar el contraste entre ambos marcos, es necesario considerar que las Bases Curriculares son una norma nacional obligatoria, mientras que los PSSM del NCTM (2000) son un referente profesional orientador, que los estados y distritos estadounidenses pueden adoptar con autonomía. Los hallazgos no cuestionan la pertinencia del Decreto N.º 193 (MINEDUC, 2019b). Sugieren, más bien, documentar en qué niveles se formalizan las familias no lineales y cómo se articula el electivo de cál-

culo con la formación general, y contrastarlo con el currículo implementado mediante observación de clases y análisis de textos escolares, para verificar en qué medida las ODA prescritas se traducen en ODA efectivamente experimentadas.

## Conclusiones y limitaciones

El análisis comparativo de las Bases Curriculares chilenas (MINEDUC, 2016, 2019a, 2021) y los PSSM (NCTM, 2000) permite describir la prescripción del concepto de función. En primer lugar, se observa una convergencia didáctico-metodológica: ambos marcos posicionan la función como eje articulador del álgebra y de la modelización, y promueven el tránsito entre registros semióticos y el uso de tecnología.

En segundo lugar, se observan diferencias en la distribución de las familias de funciones. En Chile, las familias no lineales avanzadas se formalizan en la formación general hacia el final de la educación media, en dos OA, y el cálculo se prescribe en un electivo de la formación diferenciada, cuyo acceso formal está acotado por la matrícula HC. El NCTM las incluye en un único estándar para los grados 9.º a 12.º, sin cálculo en el Estándar de Álgebra.

En tercer lugar, esta distribución configura oportunidades de aprendizaje prescritas diferenciadas, potencialmente relevantes para la preparación universitaria en áreas STEM. El aporte del estudio radica en documentar, con una matriz de codificación explícita y verificable, en qué niveles y formaciones se prescribe cada familia de funciones y su correspondencia con el estándar del NCTM. Estos resultados descriptivos no permiten establecer efectos sobre los aprendizajes efectivos ni caracterizar la implementación curricular realizada en las aulas, lo que constituye la principal línea de investigación futura.

Limitaciones. Este trabajo presenta limitaciones metodológicas y analíticas que deben considerarse al interpretar sus resultados:

Naturaleza del currículo analizado: el estudio se centró en el currículo prescrito (MINEDUC, 2016, 2019a, 2021; NCTM, 2000), por lo que no ofrece información sobre el currículo implementado ni el logrado.

Carácter de la comparación cuantitativa: los porcentajes son indicadores descriptivos internos. Los corpus difieren en alcance y granularidad (eje Álgebra y funciones en 7.º básico a 2.º medio; todos los OA de conocimiento en 3.º y 4.º medio; expectativas del Estándar de Álgebra; todos los OA del electivo), y el 100,0 % del electivo refleja su carácter especializado.

Representatividad del marco internacional: los PSSM (NCTM, 2000) son un estándar profesional cuya adopción varía entre estados y distritos; no se analizaron estándares estatales vigentes.

Codificación: fue realizada por el autor principal y revisada por una segunda investigadora; la codificación de algunos OA depende de criterios interpretativos y la demanda cognitiva se asignó por OA.

Alcance del corpus chileno: se analizó un electivo de la formación diferenciada HC, no los demás electivos ni la formación diferenciada técnico-profesional.

Acceso al electivo: la cota del 63,4 % es un máximo, y no se dispone de datos públicos de oferta ni de elección.

Evaluaciones: se describen los contenidos contemplados por las pruebas, no resultados; el vínculo con evaluaciones internacionales como PISA (OECD, 2023) es indirecto, pues evalúa a estudiantes de 15 años, antes del tramo de 3.º y 4.º medio.

## Referencias

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Longman. https://archive.org/details/taxonomyforlearn0000unse

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Editorial Síntesis. https://www.sintesis.com/libro/funciones-y-graficas

Best, M., & Bikner-Ahsbahs, A. (2017). *The function concept at the transition to upper secondary school level: Tasks for a*

*situation of change*. ZDM - Mathematics Education, 49(6), 865-880. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0880-6

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58. https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/download/1620/1087

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Lawrence Erlbaum Associates.

Cellard, A. (2005). El análisis documental. In J. Poupart, J.-P. Deslauriers, L.-H. Groulx, A. Laperrière, R. Mayer, & Á. Pires (Eds.), *La investigación cualitativa: Enfoques epistemológicos y metodológicos* (pp. 357-387). Editorial Síntesis.

College Board. (2020). *2020 SAT Suite of Assessments Annual Report*. https://reports.collegeboard.org/media/pdf/2020-total-group-sat-suite-assessments-annual-report.pdf

College Board. (2023). *2023 SAT Suite of Assessments Annual Report*. https://reports.collegeboard.org/media/pdf/2023-total-group-sat-suite-of-assessments-annual-report%20ADA.pdf

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66-86. https://doi.org/10.2307/749228

Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional. (2024). Temario Prueba de Competencia Matemática 2 (M2), Admisión 2025 [PDF]. https://historico.demre.cl/publicaciones/pdf/2024-23-03-23-temario-paes-regular-m2.pdf

Digel, S., Bolz, L., & Roth, J. (2023). *The effects of covariational reasoning on conceptual learning of functions with digital-enhanced experiments* [Ponencia]. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13), Budapest, Hungary. https://hal.science/hal-04407891

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). Registers of semiotic representations and analysis of the cognitive functioning of mathematical thinking. In *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations* (pp. 37-63). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9_3

Johnson, H. L., McClintock, E. D., & Gardner, A. (2020). Opportunities for reasoning: Digital task design to promote students' conceptions of graphs as representing relationships between quantities. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6*(3), 340-366. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00061-9

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates.

Krippendorff, K. (2019). *Content analysis: An introduction to its methodology* (4.ª ed.). SAGE Publications. https://doi.org/10.4135/9781071878781

Llanes Luna, A. L., Pino-Fan, L. R., & Ibarra Olmos, S. E. (2022). Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile. *Educación Matemática*, *34*(2), 182-216. https://doi.org/10.24844/em3402.07

McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *17*(3), 305-322. https://doi.org/10.3102/01623737017003305

Ministerio de Educación. (2012). *Bases Curriculares: Matemática (1° a 6° básico)*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/632/MONO-44.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ministerio de Educación. (2016). *Bases Curriculares: Matemática (7° básico a 2° medio)*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/654

Ministerio de Educación. (2019a). *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/sites/default/files/newtenberg/614/articles-91414_bases.pdf

Ministerio de Educación. (2019b). Decreto N° 193 aprueba Bases Curriculares para 3° y 4° año de educación media, asignaturas que indica. Currículum Nacional. https://www.curriculumnacional.cl/recursos/decreto-193-aprueba-bases-curriculares-cursos-3o-4o-ano-educacion-media-asignaturas-indica

Ministerio de Educación. (2021). Programa de estudio: Límites, derivadas e integrales, 3.º y 4.º medio. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/curriculum/3o-4o-medio/limites-derivadas-integrales/3-medio-hc

Ministerio de Educación. Centro de Estudios MINEDUC. (2022). Apuntes 18-2022. Ministerio de Educación. https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2022/01/APUNTES-18_2022_fd01-1.pdf

Ministerio de Educación de Chile, Sistema de Acceso a la Educación Superior. (2023). Instrumentos de acceso, especificaciones y temarios: Admisión 2024. https://acceso.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/06/DOC.-Instrumentos-Acceso-Admision-2024.pdf

Moukhliss, M., Latifi, M., Ennassiri, B., Elmaroufi, A., Abouhanifa, S., & Achtaich, N. (2023). The impact of GeoGebra on algebraic modeling problem-solving in Moroccan middle school students. *Journal of Educational and Social Research*, *13*(1), 57. https://doi.org/10.36941/jesr-2023-0006

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. https://www.nctm.org/standards2000/

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Paoletti, T., Gantt, A. L., & Vishnubhotla, M. (2022). Constructing covariational relationships and distinguishing nonlinear and linear relationships. In G. Karagöz Akar, İ. Ö. Zembat, S. Arslan, & P. W. Thompson (Eds.), *Quantitative Reasoning in Mathematics and Science Education* (Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 21, pp. 133-167). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7_6

Parra-Urrea, Y. E., & Pino-Fan, L. R. (2022). Proposal to systematize the reflection and assessment of the teacher's practice on the teaching of functions. *Mathematics*, *10*(18), 3330. https://doi.org/10.3390/math10183330

Schmidt, W. H., Cogan, L. S., Houang, R. T., & McKnight, C. C. (2011). Content coverage differences across districts/states: A persisting challenge for U.S. education policy. *American Journal of Education*, *117*(3), 399-427. https://doi.org/10.1086/659213

Schmidt, W. H., Burroughs, N. A., Zoido, P., & Houang, R. T. (2015). The role of schooling in perpetuating educational inequality: An international perspective. *Educational Researcher*, *44*(7), 371-386. https://doi.org/10.3102/0013189X15603982

Soneira, C., González-Calero, J. A., & Arnau, D. (2023). Effect of algebraic language and problem text wording on problem model accuracy when solving age word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *114*(1), 109-127. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10236-x

Spivak, M. (2012). *Calculus* (4.ª ed.). Editorial Reverté. https://www.academia.edu/165424055/Calculus_Spivak_Michael_2012

Steketee, S., & Scher, D. (2016). Connecting functions in geometry and algebra. *The Mathematics Teacher*, *109*(6), 448-455. https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.6.0448

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics. https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically

Trujillo, M., Atarés, L., Canet, M. J., & Pérez-Pascual, M. A. (2023). Learning difficulties with the concept of function in maths: A literature review. *Education Sciences*, *13*(5), 495. https://doi.org/10.3390/educsci13050495

# Anexos

## Anexo A.1. Criterios de contenido funcional F1-F4 y regla de codificación.

### Tabla de decisión aplicada:

| Criterio | Pregunta que orienta la decisión |
|---|---|
| F1 | ¿El descriptor identifica expresamente funciones o dependencia funcional? |
| F2 | ¿Solicita generalizar una regla de dependencia, explícita o recursiva? |
| F3 | ¿Solicita representar, analizar o transformar funciones o relaciones de variación? |
| F4 | ¿Solicita utilizar una función como modelo de una situación? |

### Regla de codificación.

Unidad de análisis: cada OA / expectativa curricular completa del corpus seleccionado. Se codifica como incluido cuando su descriptor cumple al menos uno de los criterios F1-F4 y como excluido cuando no aporta evidencia suficiente para satisfacerlos. Los criterios no son excluyentes: una unidad puede recibir varios códigos, pero se contabiliza una sola vez en $N_f$. La vinculación derivada únicamente del bloque curricular o de posibles actividades de implementación se registra como contextual y no se incorpora al recuento principal. La codificación se realiza sobre el texto completo de las unidades; los descriptores incluidos en las matrices son síntesis para su presentación.

Fórmula:

$$P = \frac{N_f}{N_t} \times 100$$

Donde $N_t$ es el total de unidades analizadas, $N_f$ es el total de unidades incluidas por cumplir al menos un criterio F1-F4 y $P$ es el porcentaje de unidades con contenido funcional, redondeado a un decimal.

## A.2. Cuadro de conciliación: de los anexos a la Tabla 5

| Documento | Anexo | Corpus analizado | Total analizado | Incluidos | Excluidos | *P = Nf/Nt* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| NCTM (2000), Álgebra, 9.º a 12.º | A.3 | Expectativas de Álgebra | 15 | 10 | 5 | 66,7 % |
| MINEDUC (2016), 7.º a 2.º medio | A.4 | OA del eje Álgebra y funciones | 16 | 7 | 9 | 43,8 % |
| MINEDUC (2019a), 3.º a 4.º medio formación común | A.5 | OA del eje Álgebra y funciones | 8 | 2 | 6 | 25,0 % |
| MINEDUC (2019a), 3.º a 4.º medio formación diferenciada | A.6 | OA del eje Álgebra y funciones | 5 | 5 | 0 | 100 % |

## A.3. NCTM (2000): Álgebra, grados 9.º a 12.º.

Unidad de análisis: cada expectativa completa del estándar de Álgebra de NCTM para grados 9.º a 12.º.

Regla: se incluye si cumple al menos uno de los criterios F1-F4; los códigos no son excluyentes, pero cada expectativa se contabiliza una sola vez en $N_f$.

Nota: los descriptores son síntesis; la codificación se realiza sobre el texto completo de cada expectativa.

### Bloque AL1: Comprender patrones, relaciones y funciones

#### Subestándar AL1: 6/6 incluidos

| Código analítico | Descriptor de la expectativa | Decisión propuesta | Fundamento |
|---|---|---|---|
| NCTM-AL1.1 | Generalizar patrones mediante funciones definidas explícita y recursivamente. | Incluir | F1 y F2: identifica funciones y solicita generalizar patrones mediante reglas explícitas y recursivas. |
| NCTM-AL1.2 | Comprender relaciones y funciones y seleccionar, convertir y utilizar diversas representaciones. | Incluir | F1 y F3: identifica funciones y solicita analizar propiedades y comportamientos. |
| NCTM-AL1.3 | Analizar funciones de una variable mediante: tasas de cambio, interceptos, ceros, asíntotas, comportamiento local y global. | Incluir | F1 y F3: propiedades y comportamiento funcional. |
| NCTM-AL1.4 | Comprender y realizar combinaciones aritméticas, composiciones e inversiones de funciones, utilizando tecnología para expresiones más complejas. | Incluir | F1 y F3: identifica funciones y solicita transformarlas mediante operaciones, composición e inversión. |

| Código analítico | Descriptor de la expectativa | Decisión propuesta | Fundamento |
|---|---|---|---|
| NCTM-AL1.5 | Comprender y comparar propiedades de clases de funciones, incluidas exponencial, polinómica, racional, logarítmica, periódica | Incluir | F1 y F3: identifica familias de funciones y solicita analizar y comparar propiedades. |
| NCTM-AL1.6 | Interpretar representaciones de funciones de dos variables | Incluir | F1 y F3: identifica funciones y solicita interpretar representaciones. |

### Subestándar AL2: Representar y analizar con símbolos algebraicos (1/5 incluidos)

| Código analítico | Descriptor de la expectativa | Decisión propuesta | Fundamento |
|---|---|---|---|
| NCTM-AL2.1 | Comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, inecuaciones | Excluir | No cumple F1-F4: la expectativa se centra en equivalencia algebraica, sin identificar expresamente funciones o dependencia funcional. |
| NCTM-AL2.2 | Escribir formas equivalentes de ecuaciones, inecuaciones y sistemas y resolverlas con fluidez, con o sin tecnología. | Excluir | No cumple F1-F4: la tarea principal es la equivalencia y resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas, no el análisis funcional. |
| NCTM-AL2.3 | Utilizar álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas. | Excluir | No cumple F1-F4: "relaciones matemáticas" no equivale necesariamente a dependencia funcional. |
| NCTM-AL2.4 | Utilizar diversas representaciones simbólicas, incluidas ecuaciones recursivas y paramétricas, para funciones y relaciones. | Incluir | F1 y F3: identifica expresamente funciones y solicita representarlas mediante formas simbólicas, incluidas las recursivas y paramétricas. |
| NCTM-AL2.5 | Juzgar el significado, la utilidad y la razonabilidad de los resultados de manipulaciones simbólicas, incluidas las relacionadas con tecnología. | Excluir | No cumple F1-F4: la expectativa evalúa procedimientos y resultados de manipulación simbólica, sin identificar un objeto funcional. |

### Subestándar AL3: Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas (2/3 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| NCTM-AL3.1 | Identificar relaciones cuantitativas esenciales en una situación y determinar clases de funciones que podrían modelizar | Incluir | F1 y F4: identifica funciones como posibles modelos de relaciones cuantitativas. |
| NCTM-AL3.2 | Utilizar expresiones simbólicas, incluidas formas iterativas y recursivas, para representar relaciones que surgen de diversos contextos. | Incluir | F2 y F4: solicita representar relaciones contextualizadas mediante formas iterativas y recursivas. |
| NCTM-AL3.3 | Extraer conclusiones razonables sobre una situación que está siendo modelada. | Excluir | No cumple F1-F4: la expectativa se refiere a situación modelada, pero no identifica expresamente una función ni exige formular, representar o analizar una dependencia funcional. |

Subestándar AL4: Analizar cambio en diversos contextos (1/1 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| NCTM-AL4.1 | Aproximar e interpretar tasas de cambio a partir de datos gráficos y numéricos. | Incluir | F3: solicita analizar la variación entre cantidades mediante tasas de cambio, sin exigir una fórmula explícita. |

Conciliación de A.3

| Bloque | $N_t$ | $N_f$ | Excluidas |
|---|---|---|---|
| AL1: Comprender patrones, relaciones y funciones | 6 | 6 | 0 |
| AL2: Representar y analizar con símbolos algebraicos | 5 | 1 | 4 |
| AL3: Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas | 3 | 2 | 1 |
| AL4: Analizar cambio en diversos contextos | 1 | 1 | 0 |
| Total | 15 | 10 | 5 |

$$P = \frac{10}{15} \times 100\% = 66{,}7\%$$

De las 15 expectativas completas del estándar de Álgebra de NCTM para grados 9.º a 12.º, 10 cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4 y fueron incluidas en el recuento principal, lo que equivale a un 66,7 %. Las 5 expectativas restantes no identifican expresamente funciones o dependencias funcionales en su descriptor, por lo que se excluyeron conforme al protocolo adoptado.

## A.4. MINEDUC (2016): Bases Curriculares 7.º básico a 2.º medio, eje Álgebra y funciones

Unidad de análisis: Sus componentes aportan evidencia para codificar, pero no se contabilizan por separado. Se excluyen los OA de habilidades y actitudes, así como los OA de contenido y otros ejes.

7.º básico (1/4 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| MA07 OA 06 | Utilizar lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, formular reglas y propiedades y construir ecuaciones. | Excluir | No exige expresamente una regla de dependencia entre cantidades ni una estructura recursiva. Se registra una vinculación potencial, pero el texto no basta para verificar F2. |
| MA07 OA 07 | Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz$ | Excluir | No cumple F1-F4: manipulación simbólica, sin dependencia funcional. |
| MA07 OA 08 | Demostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: realizando tablas de valores, graficando los valores de la tabla, explicando las características de la gráfica y resolviendo problemas. | Incluir | F1 y F3: dependencia funcional entre variables, tabla y gráfica. |
| MA07 OA 09 | Resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita. | Excluir | No cumple F1-F4: resolución de ecuaciones, no identifica función. |

### 8.º básico (2/5 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| MA08 OA 06 | Comprender operaciones con expresiones algebraicas mediante representaciones, relaciones geométricas y formas factorizadas | Excluir | No identifica una dependencia funcional; las representaciones y la factorización no bastan para cumplir F1-F4 |
| MA08 OA 07 | Comprender la noción de función mediante cambio lineal, tablas, máquinas, regla entre *x* e *y* y representaciones gráficas. | Incluir | F1, F2 y F3: función, reglas de dependencia y representaciones. |
| MA08 OA 08 | Modelizar situaciones de la vida diaria usando ecuaciones lineales de la forma $ax = b$, $ax + b = c$; $ax + b = cx + d$, entre otras. | Excluir | Modelo mediante ecuaciones, sin función identificable en el descriptor. |
| MA08 OA 09 | Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas y simbólicas. | Excluir | La representación gráfica de una inecuación no constituye, por sí sola, representación funcional. |
| MA08 OA 10 | Mostrar que comprenden la función afín: generalizándola como suma de una constante con una función lineal, trasladando funciones lineales, determinando el cambio constante, relacionándola con el interés simple. | Incluir | F1, F3 y F4: función afín, traslación, cambio constante y uso para resolver problemas. |

### 1.º medio (1/3 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| MA1M OA 03 | Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: transformando productos en sumas y viceversa, aplicándolos a situaciones concretas, completando el cuadrado del binomio. | Excluir | Trabajo con expresiones y equivalencias, sin objeto funcional identificable. |
| MA1M OA 04 | Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2 x 2) mediante representaciones gráficas y simbólicas. | Excluir | El descriptor solicita resolver sistemas, no estudiar funciones o su variación. |
| MA1M OA 05 | Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y) = ax + by$, mediante tablas, gráficos y relaciones entre variables. | Incluir | F1 y F3: notación funcional explícita y coordinación de representaciones de relaciones entre variables. |

### 2.º medio (3/4 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| MA2M OA 03 | Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: reconociéndola en situaciones de la vida diaria, representándola en tablas y gráficos, determinando puntos especiales, seleccionándola como modelo de cambio cuadrático. | Incluir | F1, F3 y F4: función explícita, representación y análisis de propiedades, y selección como modelo. |
| MA2M OA 04 | Resolver ecuaciones cuadráticas de las formas $ax^2 = b$; $(ax + b)^2 = c$; $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + bx = c$, indicadas. | Excluir | Resolución de ecuaciones sin exigencia explícita de análisis funcional. |
| MA2M OA 05 | Mostrar que comprenden la función inversa a una función, en el caso de funciones lineales y funciones cuadráticas. | Incluir | F1 y F3: función inversa y transformación entre representaciones. |
| MA2M OA 06 | Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo: por situaciones reales, identificándolo con el interés compuesto, expresándolo en forma recursiva $f(t + 1)$-$f(t) = a^* f(t)$, resolviendo problemas. | Incluir | F2, F3 y F4: regla recursiva de dependencia $f(t)$ y modelo de cambio. |

Conciliación de A.4 con Tabla 5

| Nivel | Total (*Nt*) | Incluidos (*Nf*) | Excluidos |
|---|---|---|---|
| 7.º básico | 4 | 1 | 3 |
| 8.º básico | 5 | 2 | 3 |
| 1.º medio | 3 | 1 | 2 |
| 2.º medio | 4 | 3 | 1 |
| Total | 16 | 7 | 9 |

Total MINEDUC 2016 $P = \frac{Nf}{Nt} = \frac{7}{16} \times 100\% = 43{,}8\%$

De los 16 OA de contenido del eje Álgebra y funciones de MINEDUC (2016), 7 cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4 y fueron incluidos en el recuento principal, lo que equivale a un 43,8 %. Los 9 OA restantes no identifican expresamente funciones o dependencias funcionales en su descriptor, por lo que se excluyeron conforme al protocolo adoptado.

## A.5. MINEDUC (2019a): Bases Curriculares 3.º y 4.º medio, Matemática de Formación General.

Unidad de análisis: cada OA de conocimiento y comprensión de Matemática de Formación General. Se excluyen OA de habilidades, actitudes y asignaturas de Formación Diferenciada.

### 3.º medio (1/4 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| FG-MATE-3M-OAC-01 | Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos mediante representaciones pictóricas, simbólicas y herramientas tecnológicas. | Excluir | No cumple F1-F4: prescribe operaciones con números complejos, sin identificar funciones o relaciones de dependencia funcional. |
| FG-MATE-3M-OAC-02 | Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren medidas de dispersión y probabilidades condicionales. | Excluir | No cumple F1-F4: estadística / probabilidad, sin función identificable. |
| FG-MATE-3M-OAC-03 | Aplicar modelos de crecimiento y decrecimiento que involucren funciones exponenciales y logarítmicas, mediante procedimientos manuscritos y herramientas tecnológicas. | Incluir | F1 y F4: identifica familias de funciones y exige utilizarlas como modelos de fenómenos. |
| FG-MATE-3M-OAC-04 | Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas. | Excluir | No cumple F1-F4: geometría euclidiana, sin función. |

### 4.º medio (1/4 incluidos)

| Código | Descriptor codificado | Decisión | Justificación |
|---|---|---|---|
| FG-MATE-4M-OAC-01 | Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren porcentajes, tasas de interés e índices económicos. | Excluir | No cumple F1-F4: modelo financiero porcentual, sin regla de dependencia verificable. |
| FG-MATE-4M-OAC-02 | Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza mediante modelos binomial y normal. | Excluir | No cumple F1-F4: probabilidad / modelos de incerteza, sin función identificable. |
| FG-MATE-4M-OAC-03 | Construir modelos de crecimiento, decrecimiento y fenómenos periódicos que involucren funciones potencia con exponente entero y funciones seno y coseno. | Incluir | F1 y F4: identifica familias de funciones (potencia, seno y coseno) y exige utilizarlas como modelos. |
| FG-MATE-4M-OAC-04 | Resolver problemas que involucran representación analítica de rectas y circunferencias / geometría analítica. | Excluir | No cumple F1-F4: el descriptor no exige explicaciones de variación conforme a los criterios adoptados. |

Conciliación de A.5

| **Nivel** | $N_t$ | $N_f$ | **Excluidos** |
|---|---|---|---|
| 3.º medio | 4 | 1 | 3 |
| 4.º medio | 4 | 1 | 3 |
| Total | 8 | 2 | 6 |

Total MINEDUC 2019a $P = \frac{2}{8} \times 100 = 25{,}0\%$

De los 8 OA de conocimiento y comprensión de Matemática de Formación General de MINEDUC (2019a), 2 cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4 y fueron incluidos en el recuento principal, lo que equivale a un 25,0 %. Los 6 OA restantes no identifican expresamente funciones o dependencias funcionales en su descriptor, por lo que se excluyeron conforme al protocolo adoptado.

## A.6. MINEDUC (2019a, 2021): Bases Curriculares 3.º y 4.º medio, formación diferenciada HC, electivo Límites, derivadas e integrales

Unidad de análisis: cada OA de conocimiento y comprensión del electivo. Se excluyen los OA de habilidades y actitudes.

| **Código** | **Descriptor codificado** | **Decisión** | **Justificación** |
|---|---|---|---|
| MA-LIDI-3y4-OAC-01 | Utilizar diversas formas de representación al argumentar acerca de la composición de funciones y la existencia de la función inversa. | Incluir | F1 y F3: identifica funciones y solicita transformarlas (composición, inversa) |
| MA-LIDI-3y4-OAC-02 | Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto, para determinar convergencia y continuidad. | Incluir | F1 y F3: analiza el comportamiento local y global de funciones. |
| MA-LIDI-3y4-OAC-03 | Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo. | Incluir | F3 y F4: analiza la variación mediante la tasa de cambio y exige modelar. |
| MA-LIDI-3y4-OAC-04 | Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir de la primera y segunda derivada. | Incluir | F1 y F3: identifica funciones y solicita analizar sus propiedades mediante derivadas. |
| MA-LIDI-3y4-OAC-05 | Modelar situaciones o fenómenos que involucren la integral como área bajo la curva y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo. | Incluir | F3 y F4: analiza la variación acumulada y exige modelar. |

Conciliación de A.6: total 5; incluidos 5; excluidos 0. $P = 100$ %

De los 5 OA de conocimiento y comprensión del electivo Límites, derivadas e integrales (MINEDUC, 2019a, 2021), los 5 cumplieron al menos uno de los criterios F1-F4 y fueron incluidos en el recuento principal, lo que equivale a un 100,0 %. Este valor refleja el carácter especializado del electivo y no se interpreta como una medida comparable con las de los Anexos A.3 a A.5.