¿LA NECESARIEDAD Y UNIVERSALIDAD DE LA ARITMÉTICA? NECESSITY AND UNIVERSALITY OF ARITHMETIC?

Darío Vélez Botero[1]

Vélez B. Darío / Sophia / No. 8 / p.p. 174-178 / ISSN:1794-8932
Recepción: Septiembre 3 de 2012 - Aceptación: Octubre 18 de 2012

La creación de las ciudades fue determinante en la construcción de sistemas numéricos, pero la comprensión de las nociones básicas de los números y medidas debe remontarse a muchos miles de años atrás. La base 10 procede seguramente de los dedos de la mano, la base 60 parece tener relación con la astronomía. Hay un hecho interesante, siempre el primer signo, el del uno, es precisamente un sólo carácter (generalmente una raya), después se repite hasta que se hace difícil leerlo y se utiliza un nuevo símbolo, frecuentemente para el 5 o el 10.

Hace aproximadamente 4.000 años, la mente humana necesitaba estar familiarizada con las propiedades de los números. No pueden ser una invención arbitraria; siguen reglas precisas -descubiertas mucho tiempo después- se requiere un signo para el primer número (un palito o una rayita), si a un número dado se le añade el primero se obtiene el número siguiente. En principio, cualquier número es una serie dada de palitos.

Se observa-en las sociedades antiguas- el predominio del sistema en base 10 y la comprensión sobre los fraccionarios. No creo que sea conveniente hablar de conocimiento *a priori* en la matemática; mejor de disposición funcional del cerebro para manejar ciertos principios o prácticas que el ser humano obtuvo por experiencias empíricas o abstracciones sobre las mismas en el proceso evolutivo. Miles o millones de años moldearon el cerebro, pero no pudieron llevarlo a los lugares casi místicos de Kant (que no conoció la teoría de Darwin).

Lo que le da a la aritmética su sello de universalidad y necesariedad es la construcción dirigida por ciertas percepciones racionales derivadas del mundo real, pero aplicadas a los signos. La asociatividad de la suma está presente en el mundo social no como indicio de su posibilidad (empirismo) sino como manifestación de su inmovilidad y permanencia. El ser humano concreta esta *percepción racional* diciendo: Sean m, n, r tres números naturales arbitrarios (cuya construcción sigue también los criterios inviolables de la inducción matemática), entonces, $m+(n+r) = (m+n) + r$. Al ser indeterminados los números la propiedad es universal y al ser postulada explícitamente se reconoce su necesariedad, no se admite lo contrario ni ninguna restricción.

La conmutatividad no se percibe de manera sensorial sino por *operar voluntaria o involuntariamente los objetos hasta que se capta su esencia intelectual por reflexión.* El principio de inducción aritmética no se ve en el mundo y es la esencia de la aritmética. Es importante destacar lo de Gödel en el sentido de que la compresión de los números no es sensorial sino racional o intelectual.

Todos los sistemas de numeración respetan ciertas normas, aunque con libertades para los signos utilizados. Es muy revelador para conocer la esencia de la aritmética, estudiar cómo los antiguos manejaban los sistemas numéricos. Tres modelos se utilizaron: el aditivo, el posicional y el híbrido. Los egipcios, los romanos y los griegos utilizaron métodos aditivos: a ciertos números les atribuían un signo (por ejemplo, al uno, al dos, al tres, al cinco, al diez, al cincuenta, etc.) y representaban los demás agrupando los signos respectivos. Para números grandes se les complicaba mucho el problema y el sistema era poco apto para operaciones aritméticas como la

[1]. Economista de la Universidad de Medellín. Es profesor jubilado de la Universidad de Antioquia. Se desempeñó como docente en Matemática, Lógica y Estadística. Dirigió un seminario en Filosofía de la Matemática. Tiene publicaciones de artículos y libros en diversas áreas del conocimiento. Fue investigador principal en el montaje de la primera etapa (3 años) del Sistema Nacional de Información de la Educación Superior (SNIES). También elaboró el anteproyecto que condujo a la adopción del Decreto 1279 de 2002 (Régimen salarial de los profesores de las universidades públicas).

multiplicación y la división. Con el sistema romano era prácticamente imposible dividir, lo mismo con el griego (que utilizaba 30 letras del alfabeto como signos de números). Por eso los romanos, y en menor grado los griegos, avanzaron muy poco en la aritmética (en la geometría fueron brillantes los griegos). Y se puede asegurar sin ningún riesgo que con el sistema romano o griego es imposible construir la matemática como la conocemos hoy. De ahí sale una de nuestras tesis: El sistema numérico elegido es consustancial al desarrollo de la matemática.

Los babilonios, los indios, los chinos, los mayas, desarrollaron el sistema posicional (aunque con confusiones en algunos casos) que utiliza el signo con un valor propio y otro según la posición, por ejemplo, 5 y 456, en el último número vale 50. Los híbridos mezclan sistemas, pero son impropios para el desarrollo de la aritmética.

Nuestro sistema de numeración es en base 10 (necesita 10 caracteres para designar cualquier número). Nuestros signos son bien conocidos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. El 0 y el 1 son imprescindibles en cualquier sistema, pero se pueden construir modelos con distintas bases, incluso en base binaria –trascendental en los computadores-; a manera de ejemplo, los 5 primeros números del binario son: 0 (0), 1 (1), 2 (10), 3 (11), 4 (100) y 5(101). También se pueden construir con otras bases: 8, 12, 60 (número de signos de la base elegida).

Un criterio esencial es que cualquier número escrito en cualquier base puede ser *representado de manera única* en otra base y recíprocamente, es decir, los sistemas numéricos son equivalentes. O más generalmente: *El sistema numérico que engendra la aritmética y a toda la matemática es único.* Este es un argumento contundente en favor de que la aritmética se descubre y no se inventa y más de 2500 años dedicados a este esfuerzo revelan la enorme complejidad de esta empresa.

En los sistemas aditivos o híbridos la operación de dividir es prácticamente irrealizable, incluso muchos teoremas de la aritmética elemental no se pueden ni siquiera proponer por razones prácticas y estructurales. No creo que la aritmética esté fuera del hombre en los términos estrictos de Platón, pero tampoco es una propiedad asignada *a priori* a la mente. Nació como un hecho social en las ciudades y sin éstas, seguramente, no existiría. Es un proceso de reflexión que va acumulando resultados intelectuales, tardamos hasta las primeras décadas del siglo XIX para entender los complejos, pese a que habían aparecido desde los griegos y en los trabajos de los algebristas italianos del siglo XVI y nuevamente la idea de descubrimiento en las matemáticas elementales se va confirmando. Las estructuras construidas revelan que ciertos signos y conceptos pertenecen a ellas y que el hombre no ha podido dar cuenta de aquellos (los negativos aceptados en el siglo XVII, los complejos y los irracionales, ambos en el siglo XIX). Es curioso que desde antes de la estabilización del sistema indio (nuestro sistema decimal), todos los números "extraños" ya se conocían, esto es, fueron descubiertos, pero no se entendían; mal resulta "inventar una cosa" que es incomprensible y contraria a la razón.

Las ideas referidas a la geometría de Platón suscitan más dificultades, por un lado, la geometría parece un ramo de la física, que se ha vuelto relevante con Riemann y Einstein; pero por el otro lado, evidencia una construcción teórica, que pertenece a la matemática pura, y que en las matemáticas contemporáneas (Geometría algebraica) ha cubierto un campo de inesperados e inusitados desarrollos. Tampoco somos contundentes en afirmar que el infinito actual de Cantor y los conjuntos transfinitos son descubrimiento humano, tal vez son invención. No es de poca monta el quiebre epistemológico que pasa de aceptar tímidamente el infinito *potencial*, para introducir el infinito "*actual*", que le da existencia ontológica al infinito. Pero de la Aritmética no dudamos que es un descubrimiento, lo mismo que sus extensiones naturales (los grupos, los anillos, los cuerpos) que vuelven abstractas las operaciones elementales (suma, multiplicación) y sus propiedades.

La relación que explica la aplicación de la aritmética al mundo real se basa en un doble hecho: la conjunción de una práctica en las operaciones comerciales, como fruto de la noción primitiva pero universal de *contar,* y la comprensión intelectual de que esa práctica se corresponde con un modelo mental que todas las culturas comprendieron al desarrollar los sistemas de numeración. Cuando éstos fueron asimilados en definitiva, las matemáticas se empezaron a desarrollar, pero dos mil años de tradición guiaron las construcciones posteriores y su metodología.

La creación del hombre es la introducción de los símbolos, que no es completamente libre, pues siguen una estructura dada. Se ven claramente los esfuerzos de los indios por encontrar *las reglas correctas* para la multiplicación y división por cero. Esto confirma lo que ya afirmé que parece más bien que las reglas se descubren y no se inventan. Una razón importante es que después de aceptada la estructura del sistema de numeración decimal, se evidencia que las reglas encontradas no podrían ser otras.

Para mostrar la escasa libertad, que eventualmente tendría un "inventor", hice una prueba por reducción al absurdo de la regla "menos por menos da más" y elegí que fuera "menos", lo que condujo a una contradicción O sea que esa regla tan difícil de asimilar es necesaria y no se puede captar en el mundo físico, es un acto puramente intelectual donde actúa la mente sobre signos. Igualmente, es abstracta la operación, 5 x 0 = 0 = 0 x 5 (tomar cero veces 5).

Es realmente muy intrincado, también, afirmar que un número no se puede dividir por cero y si no acepto este hecho llego a contradicciones y absurdos. Modernamente se dice que la sucesión (1/n) tiende a ∞ cuando n (positivo) tiende a 0. Por ejemplo, si **n** es una millonésima la sucesión toma el valor 1000000. Bhaskara no estaba tan lejos, pero su error fue considerar a ∞ como si fuera un número, en realidad es una forma de decir que la sucesión es divergente o que crece indefinidamente. Brahmagupta, Bhaskara, Mahavira trabajaron entre 500 y 800 años para *descubrir* las reglas de los negativos y el cero (primer milenio). Europa sólo las aceptó en el siglo XVII.

La idea básica de número surge por tres métodos que debieron captarse -en la antigüedad- de manera singular o simultanea. Por comparación de grupos de objetos –equipotencia- diez manzanas alimentan diez personas, con 8 manzanas se quedan personas sin la fruta. Pero el ejercicio no es de la parte sensible sino de la intelectual que asimila las nociones de orden y correspondencia, prescindiendo de la naturaleza de los objetos, en este caso manzanas. El segundo es ordenar una serie de objetos, por ejemplo, palitos, que van dando la idea de 1 (I), 2 (II), etc. El tercer método, mucho más abstracto, pero que se configura en la mente, aunque sea de manera inconsciente, nace de comparar el continuo con lo discreto –las dos ideas básicas de la matemática-, por ejemplo, una persona que está pescando, la idea del movimiento del río le proporciona el continuo del tiempo y el acto de lanzar la caña o lo que sea y sacar un pez le da la idea de lo discreto, del 1 y del 2.

La necesidad de introducir símbolos apropiados para identificar grupos de objetos numerosos debió ser un imperativo en los primeros asentamientos humanos. Casi todos los lenguajes matemáticos utilizan palitos para simbolizar los cuatro primeros números. Eso proporcionaba una notación digamos para llevar cuentas. Para números más grandes era poco práctico usar palitos y se utilizaron otros símbolos, pero de tal manera que definían una correspondencia biunívoca e inequívoca con el número de objetos.

Siguiendo a Weyl, una propiedad que permite garantizar el proceso de contar es el hecho muy interesante de que al contar un grupo de objetos el orden es irrelevante, esa unicidad permite la simbolización inequívoca. Si no fuera cierto tal hecho, cada orden de conteo daría un resultado diferente lo que implicaría una multiplicidad de signos inmanejable. Esto refuerza la tesis de que la matemática (por lo menos la aritmética) no es creación libre del hombre. Existen soportes naturales que no pueden ser alterados, lo que garantiza además que la parte creativa asegure la universalidad.

Un número se construye con la convicción de que existe, que tiene identidad, y que lo podemos manipular gracias a los métodos matemáticos, que construyen operaciones para abreviar los cálculos, pero todos entienden que en definitiva son agrupaciones de unos o de palitos.

La construcción matemática de nuevos conjuntos (enteros, racionales, reales, etc.), como caso general, procura que se conserven las propiedades de los naturales (conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc,) y las de los nuevos conjuntos que se introducen a partir de aquellos, sin negar la posibilidad de añadir nuevas propiedades.

La construcción del sistema numérico decimal y posicional, introdujo la noción de infinito potencial y la necesidad de demostración, porque si algunos casos cumplen cierta propiedad quedan potencialmente un número infinito de los que no se sabe si la cumplen o no. Pero es admirable que de la estructura de los naturales surjan cosas inesperadas, que deben ser probadas como teoremas y el método natural de prueba es la inducción matemática. Por ejemplo, la suma de los primeros n impares es n^2 o el teorema de Nicómaco: imaginemos una lista con los impares y los agrupamos de la siguiente forma: el primero (1), los dos siguientes (3, 5), los tres siguientes (7, 9, 11) etc., pues debe notar usted que salió la sucesión de los cubos 1^3, 2^3, 3^3, etc. Pero por ser potencialmente infinito el conjunto de los enteros, no basta ensayar varios casos se necesita una demostración (De ahí salió la necesidad de prueba en la aritmética).

Algunas proposiciones nacen de la estructura del sistema numérico, aunque tengan otras raíces, los matemáticos las tienen que demostrar y en ningún caso son invención humana, la conjetura de Golbach: Todo par es suma de dos primos (en su forma simple), no se ha probado en 300 años y revela, como la conjetura (hoy teorema) de Fermat, que la aritmética se entrelaza con varias ramas de las matemáticas (análisis, funciones elípticas, etc.), lo que es sorprendente, pues su construcción fue como ciencia pura de los números naturales. Pero estas dos proposiciones mencionadas son de la aritmética elemental -la formulación del teorema de Fermat surge de ensayos con las ternas pitagóricas, que proceden desde la antigüedad-. Su *prueba* (que es precisamente su *descubrimiento* –esto no se debe generalizar-) es enormemente compleja y convoca diversas ramas de la matemática.

La prueba por inducción aritmética es cómo tumbar una fila "infinita" de fichas de dominó. El esquema es el siguiente: Sea P una proposición aritmética. Si la proposición es cierta para 1 (tumbar la primera ficha) y *supuesto* que es válida para n (si tumbo la ficha n), entonces, se puede *demostrar* que es válida para (n +1) (es decir que se cae la siguiente ficha) puedo concluir como teorema que la proposición es válida para todo natural (se caen todas las fichas).

Más complicado es entender la construcción de los negativos, pues es difícil encontrar explicaciones para ellos en el mundo físico. Desde los egipcios y los babilonios se manejaban ecuaciones de primero y segundo grado, que respondían a problemas prácticos particulares. Los griegos manejaban la solución de la ecuación de segundo grado, en esas ecuaciones aparecen en muchos casos los números que hoy llamamos negativos y designamos -5, por ejemplo, también aparecieron números incomprensibles como $\sqrt{-5}$, que luego se llamaron imaginarios o complejos. Ni los babilonios, ni los egipcios, ni los griegos aceptaron y tampoco comprendieron dichos números, que valga la redundancia salían de problemas prácticos.

Hay que recordar que los pitagóricos sólo aceptaban los números naturales y las razones de ellos (3/5), aunque éstas no eran propiamente números. Resolviendo el problema de encontrar la longitud de la hipotenusa en un triangulo rectángulo cuyos catetos miden una unidad aparecieron los números irracionales ($\sqrt{2}$) que no eran ni enteros ni quebrados o fraccionarios y que los griegos no pudieron descifrar. Sólo en el siglo XIX se esclareció la naturaleza de estos números. Pero todas las clases de números se hicieron visibles desde muy temprana edad y en respuesta a problemas del mundo físico.

La aritmética es de “creación” tardía, aparece en los últimos 4 ó 5 mil años. Ya en el cerebro en el proceso evolutivo debió haberse desarrollado alguna facultad para captar cosas relacionadas con la esencia de la matemática, como lo discreto y lo continuo, el espacio y el tiempo. Pero de ninguna manera creemos en una cosa mística que permita *a priori* manejar la matemática; más bien, la matemática es la interrelación entre dos fenómenos universales: la capacidad de *razonamiento humano* y el *comercio* que de manera general obliga a todos los pueblos a familiarizarse con el sistema de *contar* que es muy complejo y no podemos atribuirlo a impresiones sensoriales. En el mundo físico no percibimos la inducción aritmética, o la asociatividad, aunque incidentalmente estemos en contacto con ella.

Los indios dieron una explicación muy importante para los negativos (la noción de deuda), en un momento en que el comercio ya estaba tan desarrollado que era clara para todo mundo. La multiplicación de los negativos trae complejidades muy grandes, pero su construcción sigue ciertas reglas del espíritu matemático y de ciertos imperativos que deben atenderse para que la matemática sea consistente y relevante. Las reglas deben respetar las propiedades ya descubiertas en los naturales, por eso la capacidad para construirlas tiene muchas restricciones.

En resumen, desde la antigüedad se nota la idea del hombre de construir sistemas de numeración, con propiedades que lentamente se van construyendo y desarrollando a lo largo de muchos años, los sistemas de los naturales acaban por mostrar que el sistema diseñado es único y que las reglas de operación no se pueden alterar, eso refleja nítidamente que el hombre descubrió la aritmética y no la inventó, no tenía libertad para hacerlo.

Referencias bibliográficas

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

Dou, A. (1970). *Fundamentos de la matemática.* Barcelona: Editorial Labor, S. A.

Kant, E. (1984). *Crítica de la razón pura.* Barcelona: Ediciones Orbis, S.A.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.

Weyl, H. (1965). *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural.* México: Centro de Estudios filosóficos. Universidad Nacional Autónoma de México.