RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y RELACIONES RECTANGULARES

Arnold Oostra

Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad del Tolima.*

RESUMEN

Ese presentan las relaciones rectangulares: ejemplos, propiedades, su conexión con las relaciones de equivalencia, su relevancia en el contexto del Álgebra Universal.

Palabras clave: Relación binaria; relación de equivalencia; relación rectangular; álgebra; variedad; congruencia.

ABSTRACT

Presenting rectangular relations: examples, properties, their connection with the relations of equivalence and their relevance in the Universal Algebra context.

Key words: Rectangular relations; Relations of equivalence; Rectangular relations; Algebra; Variety; Consistency.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Como todas las artes y ciencias, la matemática procura capturar nociones generales mediante representaciones 'concretas' y manejables.

Uno de tales fenómenos muy generales es el concepto de clasificación.

En el contexto —particular y por cierto limitado— de la teoría de conjuntos clásica, una clasificación del universo corresponde a una partición en un conjunto. Como es bien sabido, hay una correspondencia biyectiva entre las particiones en un conjunto y las *relaciones de equivalencia* en el mismo (véase por ejemplo [3, 5, 6]).

* Universidad del Tolima. Ibagué, Tolima, Colombia. AA 546. Becario 2003–2004 de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia. E-mail:oostra@telecom.com.co

A manera de referencia, en seguida se consigna una lista de las definiciones pertinentes. Ejemplos y detalles pueden encontrarse en los tres textos citados.

Definición

Una relación (binaria) es un subconjunto de algún producto cartesiano $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}$ de conjuntos. Una relación (binaria) en un conjunto $\boldsymbol{U}$ es un subconjunto del producto $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U}$.

Definición

Sea $\boldsymbol{R}$ una relación en un conjunto $\boldsymbol{U}$.

- R es reflexiva si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ para cada $x \in \boldsymbol{U}$.
- R es simétrica si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}$ implica $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ para cada $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U}$.
- R es antisimétrica si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ implica $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ para cada $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U}$.
- R es transitiva si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{y}, z) \in \boldsymbol{R}$ implica $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{R}$, cada $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{U}$.

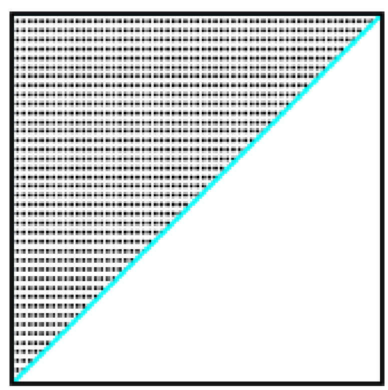
Definición

Una relación de equivalencia en un conjunto es una relación reflexiva, simétrica y transitiva en el mismo. **Definición.** Una relación de equivalencia en un conjunto es una relación reflexiva, simétrica y transitiva en el mismo. $\in$

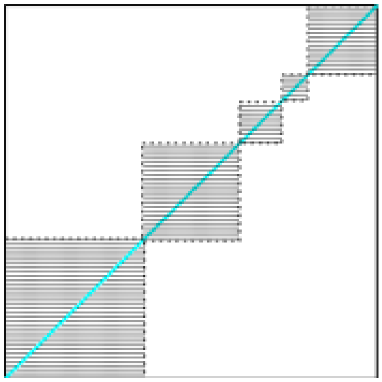
Definición

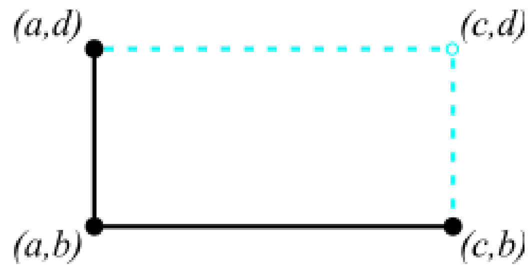
Una relación de orden en un conjunto es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en el mismo.

Algunas características de una relación pueden apreciarse en su gráfico (véase [4]). Por ejemplo, una relación es reflexiva si su gráfico contiene la diagonal 'ascendente'; es simétrica si su gráfico es simétrico respecto a esta diagonal. En el gráfico de una relación de orden siempre se aprecian la reflexividad y la antisimetría, pero si el dominio y el codominio se dotan del mismo orden representado entonces el gráfico es el siguiente. $\in$



Por otro lado, en el gráfico de una relación de equivalencia se aprecian siempre la reflexividad y la simetría. Si para el gráfico se agrupan —se clasifican— el dominio y codominio según las clases de equivalencia, el grafico consiste en una familia de cuadrados sobre la diagonal.





Con este criterio geométrico y empleando simetría no es difícil verificar los hechos siguientes.

RELACIONES RECTANGULARES.

A diferencia de las nociones listadas en la sección 1, la siguiente no se limita a relaciones en un mismo conjunto.

Definición

Una relación binaria $R \subseteq U \times V$ es rectangular si para cada $a,c \in U$ y $b,d \in V$:

$$(a,b),(a,d),(c.b) \in R \text{ implica } (c,d) \in R$$

El artificio nemotécnico siguiente puede ayudar en el manejo de la definición: las parejas se escriben en columna y se 'eliminan' los elementos repetidos en cada columna, escribiendo los que aparecen solo una vez.

$$\begin{array}{c} (a,d)\in R \\ (a,b)\in R \\ (c,b)\in R \\ \hline (c,d)\in R \\ \hline \end{array}$$

El nombre se justifica inicialmente por la siguiente presentación gráfica de la condición definitoria: si tres 'vértices' de un 'cuadrilátero' están en la relación, el cuarto también.

Ejemplo 1: En ***R*** × ***R***, un disco no es una relación rectangular pero una circunferencia sí.

Ejemplo 2: Cualquier sección cónica con el eje paralelo a alguno de los ejes coordenados es una relación rectangular en ***R*** × ***R***.

Otra justificación para el nombre de estas relaciones reside en que las relaciones rectangulares básicas son los rectángulos.

Definición

En el producto cartesiano ***U*** × ***V***, un rectángulo es un producto ***A*** × ***B*** donde.

Ejemplo 3: Todo rectángulo es una relación rectangular.

Demostración. Esto es evidente bajo cualquiera de las presentaciones: con el criterio geométrico salta a la vista; con la definición, si

$$(a,b),(a,d),(c,b) \in A \times B$$

entonces

$$c\in A, d\in B$$

de donde

$$(c,d)\in A\times B\,.$$

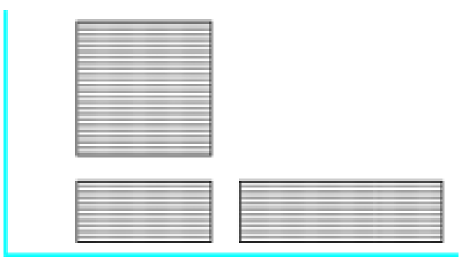
El ejemplo siguiente muestra que no toda relación rectangular es un rectángulo.

Ejemplo 4: Para cualquier conjunto ***U***, la relación *diagonal*

$$\Delta=\{(x,x)\mid x\in U\}$$

es una relación rectangular en ***U*** × ***U***.

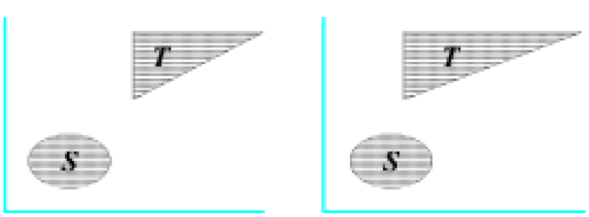
Del diagrama siguiente es claro que la unión —aún finita— de rectángulos no es una relación rectangular.



Definición

Dos subconjuntos ***S***, ***T*** de ***U*** × ***V*** son proyectivamente *disyuntos* si sus proyecciones son disyuntas, esto es, si y $\pi_V(S)\cap\pi_V(T)=\phi$

En el diagrama siguiente, los dos subconjuntos a la izquierda son proyectivamente disyuntos y los otros dos no.



Es evidente que dos subconjuntos proyectivamente disyuntos son disyuntos a secas.

Teorema 1

Una relación binaria es rectangular si y solo si es la unión de rectángulos proyectivamente disyuntos dos a dos.

Demostración.

$\Leftarrow$)Sea por ejemplo $R=\bigcup_{i\in I}A_i\times B_i$ donde para $i\neq j$ es $A_i\cap A_j=\phi, B_i\cap B_j=\phi$. Sean $(a,d),(a,b),(c,b)\in R$ de manera que para ciertos índices $i,j,k\in I$ se tiene

$$(a,d)\in A_i\times B_i \qquad a\in A_i, d\in B_i$$
$$(a,b)\in A_j\times B_j \qquad a\in A_j, b\in B_j$$
$$(c,b)\in A_k\times B_k \qquad c\in A_k, b\in B_k$$

Ahora de $a\in A_i\cap A_j$ se sigue $i=j$ y de $b\in B_j\cap B_k$ se sigue $j=k$ Luego también $i=k$ y de $d\in B_i$ se sigue $d\in B_k$ Así $(c,d)\in A_k\times B_k\subseteq R$ y $(c,d)\in R$. De esta manera ***R*** es rectangular.

$\Leftarrow$)Sea ***R*** ⊆ ***U*** × ***V*** una relación binaria rectangular. Para cada $(a,b)\in U\times V$ se definen los conjuntos R_b, ${}_aR$ como

$$R_b=\{x\in U\mid (x,b)\in R\},\quad {}_aR=\{y\in V\mid (a,y)\in R\}$$

Si $(a,b)\in R$ entonces $a\in R_b, b\in {}_aR$ de suerte que $(a,b)\in R_b\times {}_aR$. Dado cualquier elemento $(x,y)\in R_b\times {}_aR$, se tiene $(x,b)\in R,(a,y)\in R$ luego de $(a,b)\in R$ y recordando que ***R*** es rectangular se sigue $(x,y)\in R$. En síntesis, $(a,b)\in R_b\times {}_aR\subseteq R$ para cada $(a,b)\in R$ y así

$$R = \bigcup_{(a,b)\in R} R_b \times {}_aR$$

de suerte que ***R*** es unión de rectángulos.

Supóngase ahora que para $(a,b),(c,d)\in R$ se tiene $R_b \cap R_d \neq \phi$, sea $p \in R_b \cap R_d$ o, lo que es lo mismo,

$$(p,b)\in R, \quad (p,d)\in R \qquad (*)$$

Para $x \in U$ arbitrario es $x \in R_b$ si y solo si $(x,b)\in R$ si y solo si $(*)$ $(x,d)\in R$ si y solo si $x \in R_d$, de manera que $R_b = R_d$. Por otro lado, como $(c,d)\in R$, se tiene de donde $(c,b)\in R$.

Esto entraña $b \in {}_cR$ y como $b \in {}_aR$ se tiene ${}_aR \cap {}_cR \neq \phi$. Por un argumento simétrico al anterior se recibe ${}_aR = {}_cR$.

En resumen, si $R_b \cap R_d \neq \phi$ entonces ${}_aR \cap {}_cR \neq \phi$.

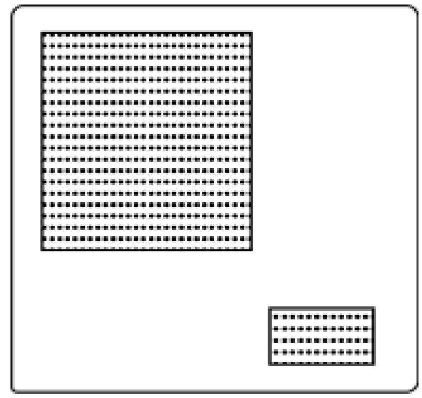
La misma igualdad se obtiene —de manera simétrica— cuando ${}_aR = {}_cR$. Así es una

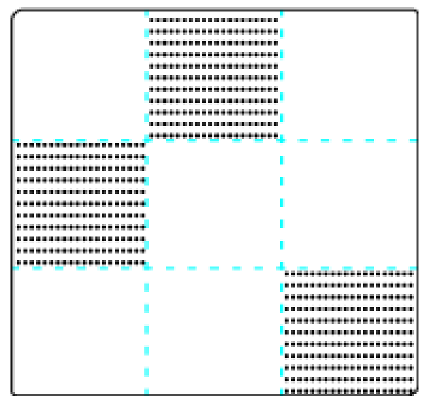
$$\{R_b \times {}_aR \mid (a,b)\in R\}$$

familia de rectángulos proyectivamente disyuntos dos a dos.

Esta caracterización arroja más ejemplos interesantes.

Ejemplo 5:





Demostración. A la izquierda, la relación rectangular es

$$(A\times D)\cup(C\times B)$$

donde ***A***,***C*** son subconjuntos disyuntos de ***U*** y ***B***,***D*** lo son de ***V***. A la derecha, la relación es

$$(A_1\times B_2)\cup(A_2\times B_3)\cup(A_3\times B_1)$$

donde $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una partición de ***U*** y $\{B_1, B_2, B_3\}$ es una partición de ***V***. Esta relación también es rectangular.

Este ejemplo puede generalizarse con facilidad. Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición finita de U y $\{B_1, \ldots, B_n\}$ una de ***V*** con igual número de clases, para cada permutación de ***n*** elementos $\sigma \in S_n$ la unión

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \times B_{\sigma k}$$

es una relación rectangular.

El siguiente ejemplo constituye una generalización posible del ejemplo 4.

Ejemplo 6: Sea $f: U \longrightarrow V$ cualquier función. El gráfico $G(f)$ —o bien, la función vista como conjunto de parejas— es una relación rectangular en $U \times V$.

Demostración. No es difícil dar un argumento directo a partir de la definición:

si $(a,d),(a,b),(c,b) \in G(f)$ entonces de $d = f(a)$ y $b = f(a)$ se sigue $b = d$

de donde $(c,d) = (c,b) \in G(f)$. Por otro lado, en términos del teorema puede expresarse.

$$G(f) = \bigcup_{x \in U} \left(f^{-1}\{f(x)\}\right) \times \{f(x)\}$$

—aquí pueden repetirse parejas— o también

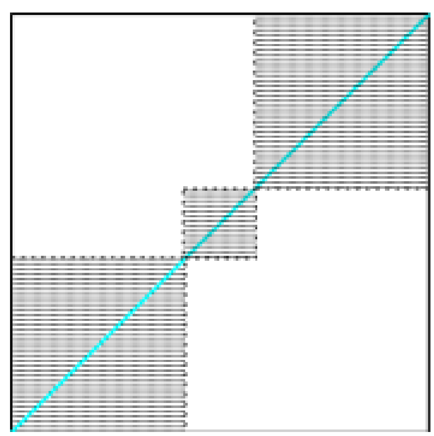
$$G(f) = \bigcup_{y \in V} \left(f^{-1}\{y\}\right) \times \{y\}$$

—aquí pueden haber parejas vacías—. En ambos casos, se trata de familias de subconjuntos proyectivamente disyuntos dos a dos. Los ejemplos dados —en especial el 5 y el 6— muestran con toda claridad que una relación rectangular no tiene por qué ser reflexiva, simétrica o transitiva. El ejemplo siguiente es otra generalización posible del ejemplo 4.

Ejemplo 7: Toda relación simétrica y transitiva en un mismo conjunto es rectangular. En particular, toda relación de equivalencia es rectangular.

Demostración. Sea R una relación simétrica y transitiva, sean $(a,d),(a,b),(c,b) \in R$ Por la simetría también $(b,a) \in R$; ahora de $(c,b),(b,a),(a,d) \in R$ por la transitividad se recibe $(c,d) \in R$.

Si una relación rectangular en un mismo conjunto contiene la diagonal $\triangle$ —en otras palabras, si es reflexiva— entonces todos los rectángulos proyectivamente disyuntos que la integran también deben contener una porción de la diagonal, es decir, se ubican sobre ella.



Como se observó en la sección 1, este dibujo corresponde a una partición del conjunto, es decir, a una relación de equivalencia. La idea intuida se confirma en seguida.

Teorema 2

Toda relación reflexiva y rectangular es una relación de equivalencia.

*Demostración.*Considérese una relación rectangular y reflexiva $R \subseteq U \times U$

Sea $(a,b) \in R$. Como ***R*** es reflexiva, $(a,a),(a,b),(b,b) \in R$;como ***R*** es rectangular, $(b,a) \in R$.

Sean $(a,b),(b,c) \in R$. Como R es reflexiva, $(a,b),(b,b),(b,c) \in R$; como ***R*** es rectangular, $(a,c) \in R$.

Corolario

Una relación binaria en un mismo conjunto es de equivalencia si y solo si es reflexiva y rectangular.

Esta caracterización de las relaciones de equivalencia tiene varios rasgos interesantes. En primer lugar, siempre resulta útil e instructivo tener a mano la mayor cantidad de descripciones diversas de un mismo fenómeno. En segundo lugar, el carácter rectangular de una relación puede visualizarse —hasta cierto punto— en el gráfico de la relación, lo que no sucede con el carácter transitivo. En tercer lugar y como se observó al principio de esta sección, el concepto de relación rectangular tiene sentido en un contexto más general que el de las relaciones de equivalencia. En efecto, mientras las relaciones simétricas y transitivas deben ser, de entrada, relaciones en un mismo conjunto, las relaciones rectangulares pueden existir entre conjuntos diferentes.

ÁLGEBRAS Y CONGRUENCIAS

En esta sección se indican algunas nociones básicas de Álgebra Universal que permiten el enunciado de un bello teorema en el que las relaciones rectangulares juegan un papel sobresaliente. Para mayores detalles pueden consultarse los textos [1, 2], el primero de ellos es una excelente introducción al Álgebra Universal y está disponible en Internet.

Como una primera aproximación, el Álgebra Universal puede verse como una generalización del Álgebra, entendida a su vez como el estudio de estructuras específicas: grupos, anillos, campos, espacios vectoriales. En el contexto del Álgebra Universal un álgebra es una estructura —denotada A, por ejemplo— que consiste en un conjunto A dotado de una cantidad finita de operaciones, a saber, funciones $f_i : A^n \longrightarrow A$ para alguna *aridad* ***n***. Esto a veces se simboliza como sigue.

$$A = \langle A; f_1, \ldots, f_k \rangle$$

Por regla general, se exige que las operaciones de una estructura específica tengan ciertas propiedades adicionales. Así, por ejemplo, un grupo puede verse como una estructura $G = \langle G\ ;\ \cdot\ ,\ ^{-1}, e \rangle$ cuyas operaciones satisfacen ciertas ecuaciones, los axiomas de grupo; un anillo es un álgebra de la forma $A = \langle A\ ;\ +\ ,\ -\ ,\ \cdot\ , 0 \rangle$; un retículo —conjunto ordenado en el cual cada par de elementos tiene extremo superior *Sup* y extremo inferior *Inf* — puede describirse como un álgebra $R = \langle R\ ;\ \wedge\ ,\ \vee \rangle$ cuyas operaciones satisfacen determinadas ecuaciones; un álgebra booleana tiene la forma $B = \langle B\ ; \wedge\ , \vee\ , '\ , 0\ , 1 \rangle$.

Un gran teorema de Álgebra Universal, debido a Birkhoff, da plena justificación al hecho de que inicialmente se consideren solo tres 'operaciones con álgebras': subálgebras, productos y cocientes.

Un subuniverso de un álgebra ***A*** es un subconjunto ***S*** de ***A*** que es cerrado para las operaciones. Eso no siempre hace de ***S*** un álgebra que satisface las mismas condiciones —por ejemplo, Z es un subuniverso del campo $\mathbb{Q} = \langle Q\ ; +\ , -\ , \cdot\ , 0\ , 1 \rangle$ pero no es un campo— pero cuando eso sí sucede, se tiene una subálgebra.

Dadas dos álgebras $A = \langle A\ ; f_1 , \ldots , f_k \rangle, B = \langle B\ ; f_1 , \ldots , f_k \rangle$ *con las mismas operaciones*, se tiene de manera natural el producto

$$A \times B = \langle A \times B ; f_1 , \ldots , f_k \rangle$$

donde las operaciones se definen 'componente a componente', esto es, $f_i\ (a,b) = (\ f_i(a)\ , f_i(b))$. De la misma manera pueden considerarse productos de tres, cuatro o incluso infinitas álgebras. De nuevo, el producto no siempre tiene todas las propiedades adicionales que tienen las operaciones — por ejemplo, el producto de dos campos *nunca* es un campo —.

Si ***A*** es un álgebra y ***R*** es una relación de equivalencia en el conjunto ***A***, el conjunto cociente ***A***/***R*** no siempre es un álgebra con las mismas operaciones que ***A***, pues las operaciones no siempre 'pasan' de manera natural al cociente. Para ello, es condición necesaria y suficiente que la relación de equivalencia sea compatible con todas las operaciones del álgebra: si $(x, y) \in R$ entonces $(f_i(x), f_i(y)) \in R$, y de la misma manera si f_i tiene aridad 2 o mayor. Tales relaciones de equivalencia reciben el nombre de *congruencias*: en los grupos, existe una correspondencia biyectiva entre las congruencias y los *subgrupos normales* y en los anillos, entre las congruencias y los ideales. Una vez más, aún si la relación de equivalencia es compatible, las operaciones del álgebra cociente no siempre comparten todas las propiedades impuestas al álgebra — ningún cociente Z_n del grupo sin torsión Z es sin torsión—.

El hecho de que una relación ***R*** en ***A*** sea compatible con las operaciones de ***A*** puede expresarse de manera equivalente diciendo que el conjunto ***R*** es un subuniverso del álgebra producto ***A*** × ***A***. De esta manera, el conjunto de congruencias de un álgebra ***A*** es el conjunto de subuniversos del producto ***A*** × ***A*** o bien, empleando el corolario 2, Con

(A) = {subuniversos reflexivos de ***A*** x ***A***}.

En la terminología del Álgebra Universal, una variedad es una clase de álgebras cerrada para subálgebras —esto es, todo subuniverso es subálgebras —, para productos y para cocientes. La clase de todos los grupos, la de todos los anillos, la de los retículos, la de las álgebras booleanas, son ejemplos de variedades. Como se observó en los ejemplos citados arriba, no son variedades la clase de los campos ni la de los grupos sin torsión.

En tanto relaciones binarias, dos relaciones de equivalencia pueden componerse y la relación compuesta es una relación de equivalencia. Si el universo es un álgebra y ambas relaciones de equivalencia son congruencias, la relación compuesta también es una congruencia. Lo que no se tiene siempre es que esta composición sea conmutativa pues, como es bien sabido, la composición es el ejemplo por excelencia de operación no conmutativa. Un álgebra A es de *congruencias permutables* si para cada par de congruencias R, S de A se tiene

$$R \circ S = S \circ S$$

y una variedad es de congruencias permutables si todas las álgebras que lo integran lo son. Las variedades de grupos, anillos y álgebras booleanas son de congruencias permutables mientras la de retículos no lo es [1, 2].

La siguiente caracterización se prueba en [2] y fue la motivación para el presente estudio de las relaciones rectangulares.

Teorema 3

Una variedad es de congruencias permutables si y solo si todo subuniverso del producto de dos álgebras de la variedad es rectangular.

En símbolos: la variedad V es de congruencias permutables si y solo si para cada par de álgebras, $A, B \in V$ si S es cualquier subuniverso del producto $A \times B$ entonces S es rectangular.

De manera que en una variedad de congruencias permutables, un subuniverso del producto $A \times A$ es una congruencia del álgebra A si y solo si es reflexivo. Así, en tales variedades se tiene Con

(A) = {subuniversos reflexivos de ***A*** x ***A***}.

BIBLIOGRAFÍA

BURRIS , Stanley and H. P. SANKAPPA-NAVAR. A Course in Universal Algebra. Graduate Texts in Mathematics 78. New York, 1981.

KAARLI , Kalle and PIXLEY., Alden F. Polynomial Completeness in Algebraic Systems. Boca Raton, Fl.: Chapman & Hall/CRC, 2001.

MUÑOZ, José María. Introducción a la Teoría de Conjuntos. 4 ed. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2002.

OOSTRA, Arnold. Temas de Conjuntos Ordenados. COLOQUIO DISTRITAL DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA (10: Bogotá: 1993). Bogotá: Universidad Nacional. 1993.

OUBIÑA , Lía. Introducción a la Teoría de Conjuntos . 7 ed. Buenos Aires: Eudeba, 1974.

PINZÓN, Álvaro. Conjuntos y Estructuras. México: Harla, 1975.

Disponible en varios sitios de Internet:

- http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/ualg.html
- http://www.math.sc.edu/_mcnulty/alglatvar/burrissanka.pdf